1. óra

Hatáselvek

Az óra célja röviden az, hogy megismerkedjünk a variációs módszerekkel. Ez gyakorlatilag egy új nyelv, amire az eddig megszokotthoz (rajzolni egy diagramot az erőkkel, aztán $\vec{F} = m\vec{a}$) hasonlóan le lehet fordítani azt, hogy mi történik a világban. Az előnye az, hogy általában sokkal könnyebb felírni így a mozgást leíró egyenleteket, mégha megoldani nem is mindig lehet azokat. Mellékesen pedig ezen a nyelven lesz olvasható a későbbiekben két egész fontos ága a tudományunknak: a kvantumfizika és az általános relativitáselmélet.

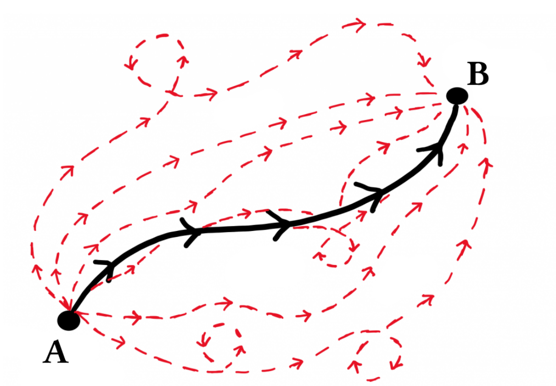
Mechanikáról léve szó, azt szeretnénk megtudni, hogy hogyan jutunk el valamilyen A pontból a B-be. Ezt sokféle úton lehetne megtenni, sok féle Γ görbén; amik mentén változhat a "fizika" valamilyen (egyelőre) ismeretlen f függvények által kódolva. A függvények és a görbék relatíve bonyolult dolgok, ezért keressünk valami egyszerűbbet, mondjuk egy számot amit hívjunk $\mathcal{S}$-nek. Hogy ez is kódolja az összes eddigi információt, legyen absztraktul

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}[f(\Gamma)]$$

Ami nevesítve azt mondja, hogy $\mathcal{S}$ egy funkcionál: ahogyan egy f függvény (*function*) egy számhoz hozzárendel egy másikat, az $\mathcal{S}$ funkcionál egy függvényhez rendel hozzá egy számot.

A fizika ott kezdődik, hogy eközül a sok út közül csak egy lehet reális: az alma nem keringőzik a levegőben, hanem leesik. Kitüntetett szerepe annak az útnak lesz, ahol ez az $\mathcal{S}$ hatás alig változik: extrémuma van. A legkisebb hatás elve szerint tehát az lesz a fizikailag megvalósuló pálya, amelynek mentén

$$\delta\mathcal{S} = 0$$



Korai minimumelvek

A kérdés már csak az, hogy mi is ez az $\mathcal{S}$ hatás. Először néhány történelmi példával kezdünk, és megbarátkozunk a minimalizálásával. Az előadáson hallhattunk két fontos elvet:

$$\mathcal{S}_0 = \int |\vec{p}| \mathrm{d}s \qquad\qquad \mathcal{T} = \int n(s) \mathrm{d}s \tag{1.0.1}$$

amikről beláthattuk, hogy azonosan viselkednek. A Fermat elvet már ismeritek, és levezettétek belőle a Snellius-Descartes törvényt, miszerint fénytörés esetén a beesési szögek és a törésmutatók közti összefüggés:

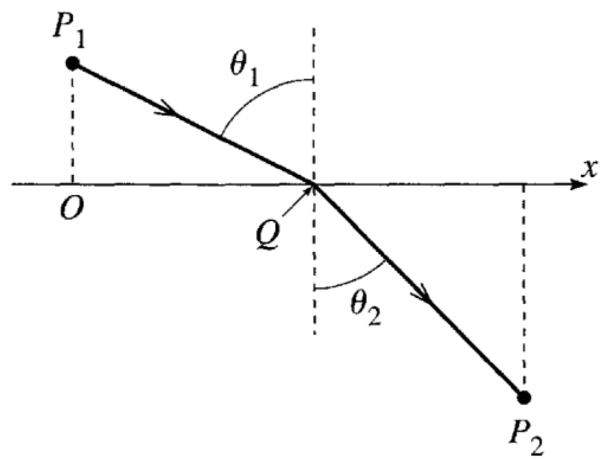
$$n_1 \sin\varphi_1 = n_2 \sin\varphi_2 \tag{1.0.2}$$

A Maupertuis elv még új, szóval első példánkban barátkozzunk vele egy kicsit.

1.1. példa: Úttörés részecskére

Van egy tömegpontunk (mondjuk egy elektron) ami kezdetben szabadon mozog egyenes vonalban, egyenletes sebességgel. Az x tengelyt elérve viszont azt tapasztalja, hogy lecsökken a potenciális energiája: a negatív tartományban a fentihez képest egy konstans $-U$ potenciál tölti ki a teret.

1.1.1. Mi történik a részecske pályájával?



1. ábra. Vázlatos ábra a részecske útjáról, ami ismerős lehet valahonnan.

Ezt a feladatot kicsit macerás megoldani a Newton törvényekkel, szóval azt későbbre hagyjuk. Használjuk helyette a Maupertuis elvet, illetve az energiamegmaradást, felírva a tengelyen áthaladás előtti és utáni pillanatokra:

$$K_1 = K_2 - U \tag{1.1.1}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - U \tag{1.1.2}$$

$$\frac{p_1^2}{2m} = \frac{p_2^2}{2m} - U \tag{1.1.3}$$

$$p_1^2 = p_2^2 - 2mU \tag{1.1.4}$$

$$|\vec{p}_2| = \sqrt{p_1^2 + 2mU} \tag{1.1.5}$$

A pontos alak most annyira nem is fontos, a lényeg az, hogy ez konstans fent is és lent is (még ha nem is ugyanaz a konstans).

A hatás felírásához szükség lesz még a megtett utakra, amiket valahogy paraméterezni kell egy koordinátarendszerben. Legyen az Origó a kiindulási P_1 pont x tengelyre vetett képe, a tengelyen áthaladás pontját pedig vegyük fel valamilyen x pontban, amire végső soron kíváncsiak vagyunk. Két szöget is be tudunk rajzolni, ezek mindjárt hasznosak is lesznek.

A hatásunk egy út szerinti integrál: bontsuk fel ketté.

$$\mathcal{S}_0 = \int_{P_1}^{P_2} |\vec{p}(s)| \mathrm{d}s = \int_{P_1}^{Q} |\vec{p}_1| \mathrm{d}s + \int_{Q}^{P_2} |\vec{p}_2| \mathrm{d}s \tag{1.1.6}$$

Mivel az impulzusok már konstansok, így ami marad az magának az útnak a kiintegrálása. Mivel ez két egyenes hossza, ez egészen egyszerű:

$$\mathcal{S}_0 = p_1 \sqrt{x^2 + y_1^2} + p_2 \sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2} \tag{1.1.7}$$

A Maupertuis elv szerint ez minimális kell, hogy legyen. Nekünk x az egyetlen dolog ami változhat, tehát

$$\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial x} = 0 \tag{1.1.8}$$

$$p_1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} - p_2 \frac{x_2 - x}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}} = 0 \tag{1.1.9}$$

Kis trigonometriával

$$\sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} \qquad \sin\theta_2 = \frac{x_2 - x}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}} \tag{1.1.10}$$

tehát

$$\boxed{p_1 \sin\theta_1 = p_2 \sin\theta_2} \tag{1.1.11}$$

Ezzel meg is oldottuk a feladatot: a potenciális energia ugrása pont olyan hatással van a részecskére, mint a törésmutató ugrása a fényre. Ha magukat a sebességeket nem ismerjük, csak a potenciált és a kimenő sebességet (ami gyakori, ha például egy laborban mi magunk rakjuk oda a potenciális energiát, és detektáljuk a kijövő részecskét), akkor átírva:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \sqrt{1 + \frac{2m}{p_1^2} U} \tag{1.1.12}$$

1.1.2. Hová lett a lendületmegmaradás?

Már az energiamegmaradás első felírt sorában láthattuk, hogy a lendület itt gyanúsan nem marad meg. Hogy ezt kicsit jobban kivesézzük, bontsuk fel a lendületeket komponensekre $\vec{p} = (p_x, p_y)$ módon, és nézzük meg az x irányúakat:

$$p_{1,x} = |\vec{p_1}| \sin\theta_1 \qquad p_{2,x} = |\vec{p_2}| \sin\theta_2 \tag{1.1.13}$$

Rögtön láthatjuk:

$$p_{1,x} = p_{2,x} \tag{1.1.14}$$

tehát a határfelülettel párhuzamos irányú lendület nem változik, megmarad. Ennek mélyebb oka a szimmetriákban rejlik: a rendszerünk szimmetrikus arra, hogy eltoljuk a P_1 és P_2 pontokat a tengellyel párhuzamosan, attól nem változik semmi. Ha arra merőlegesen tolnánk el, akkor viszont beleütközhetünk a falba, amin túl már nem ugyanarról a fizikai problémáról beszélünk.

1.1.3. Newtonos megoldás

A feladat régimódibb megoldásához kis trükközésre van szükség. Végső célunk megoldani a Newton-egyenletet, ami az energiamegmaradásnak hála

$$-\nabla U = \dot{\vec{p}} \tag{1.1.15}$$

Ami itt bajos lehet, az a ∇U. Nekünk ez a lépcsőszerű ugrás a potenciálban a Heaviside lépcsőfüggvénnyel írható le

$$U(x,y) = -U\Theta(-y) \tag{1.1.16}$$

Ami nem folytonos, ezért deriválni sem lehet szépen disztribúcióelmélet nélkül. Ha éppen nem jut eszünkbe, hogy az alapján ennek pont egy Dirac-delta a deriváltja, akkor a következő trükköket lehet bevetni.[1]

A lépcsőfüggvény sokféleképpen közelíthető. Egyik mód például a

$$\Theta(y) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh(ky) \tag{1.1.17}$$

ami visszaadja a lépcsőt, ha $k \to \infty$. Ezt már vígan lehet deriválni:

$$\partial_y \Theta(y) \approx \frac{1}{2}\frac{k}{\cosh^2(ky)} \tag{1.1.18}$$

Ennek a függvénynek pedig van egy hasznos tulajdonsága:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{\cosh^2 u}\mathrm{d}u = 1 \tag{1.1.19}$$

Beírva, a Newton törvény alakja:

$$U\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\frac{k}{\cosh^2(ky)} \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \tag{1.1.20}$$

Amiből rögtön látszik, hogy p_x állandó. A másik komponensre vonatkozó egyenlet pedig

$$U\frac{1}{2}\frac{k}{\cosh^2(ky)} = \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.21}$$

Ha ennek a kezdeti és végállapotbeli megváltozására vagyunk kíváncsiak, akkor egy kis

$$\frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}p_y = \dot{y}\mathrm{d}p_y = \frac{1}{m}p_y\mathrm{d}p_y \tag{1.1.22}$$

átírás után kiintegrálhatjuk az egyenlet mindkét oldalát y szerint:

$$U\int \frac{1}{2}\frac{k}{\cosh^2(ky)}\mathrm{d}y = \frac{1}{m}\int p_y\mathrm{d}p_y \tag{1.1.23}$$

$$U = \frac{1}{2m}\Delta p_y^2 \tag{1.1.24}$$

Tehát tisztán y irányban kapott a kis részecskénk egy impulzuslöketet.

[1] Ez akkor is hasznos lehet, ha numerikusan próbáljuk megoldani a feladatot.

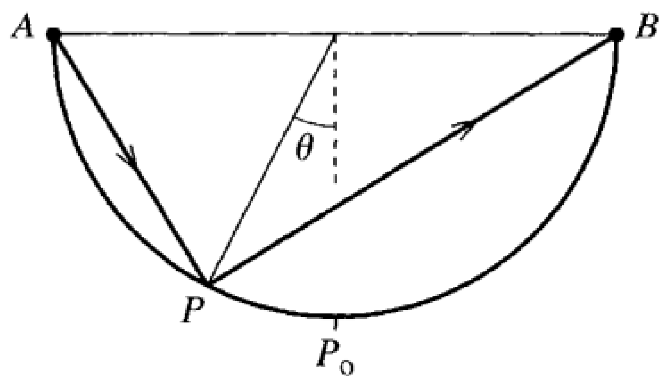
1.2. példa: Legnagyobb (?) hatás elve

Nézzünk egy példát a fényre is. A Fermat elv szerint a fény a legrövidebb időbe kerülő úton közlekedik, tehát az a pálya valósul meg, amelynek mentén a megtett idő minimális.

$$\mathcal{T} = \int n(s)\mathrm{d}s \tag{1.2.1}$$

Most bebizonyítjuk, hogy ez így nem igaz, egy görbe tükör segítségével.

Vegyük az kezdeti A és a végződő B pontokat egy félgömb alakú tükör két végében. Természetesen a legrövidebb út köztük az egyenes, de optikából tudjuk, hogy a fény tud másmerre is menni: tükröződve. Vegyük fel valahol a köztes P pontunkat a köríven, és paraméterezzük a 2. ábrán látható szöggel.



2. ábra. Görbe tükrön visszaverődés.

Kis geometria után[2] a megtett útszakaszok:

$$\overline{AP} = a = 2R\sin\left(\frac{\pi/2-\theta}{2}\right) \qquad \overline{PB} = b = 2R\sin\left(\frac{\pi/2+\theta}{2}\right) \tag{1.2.2}$$

A Fermat-elvhez fordulva a legrövidebb időre törekszünk. De itt most a törésmutató éppen konstans, tehát ez ekvivalens lesz a legrövidebb úttal, azaz

$$\mathcal{T}\cdot\frac{c}{n} = \mathcal{S} = 2R\left[\sin\left(\frac{\pi/2-\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi/2+\theta}{2}\right)\right] \tag{1.2.3}$$

Ezt kell most deriválnunk θ szerint, majd nullává tennünk.

$$\partial_\theta\mathcal{S} = -R\cos\left(\frac{\pi/2-\theta}{2}\right) + R\cos\left(\frac{\pi/2+\theta}{2}\right) = 0 \tag{1.2.4}$$

$$\cos\left(\frac{\pi/2-\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi/2+\theta}{2}\right) \tag{1.2.5}$$

Őt megoldhatjuk vizuálisan is, esetszétválasztással, vagy felhasználhatunk egy koszinuszok különbségére vonatkozó összefüggést, aminek hála

$$\sin\frac{\theta}{2} = 0 \tag{1.2.6}$$

[2]Egyenlő R szárú háromszögeink vannak, amiket meg tudunk felezni. A szárszöget a θ paraméterünkből és a 90 fokból tudjuk kikombinálni, ami után egy szinusz felismerése a feladat.

Minden esetre a megoldásaink:

$$\theta = 2n\pi\,, \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{1.2.7}$$

Nekünk ezek közül $\theta = 0$ lesz az fontos, minden más ugyanazt jelenti.

Érdekes dolgot figyelhetünk meg viszont, ha megnézzük az időtartam *második* deriváltját is a minimumban.

$$\partial_\theta^2 \mathcal{T}\big|_{\theta=0} \propto -R\left[\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right] \tag{1.2.8}$$

$$\propto -R\sin\frac{\pi}{4} \tag{1.2.9}$$

Ami negatív. Visszaidézve a korábbi matekos tudásunkat, ez azt jelenti, hogy a megvalósuló pályánk nem is egy minimumhoz köthető. Pont ellenkezőleg, egy lokális maximumhoz tartozó pályát követ ezesetben a fény.

Éppen ezért, most is és a jövőben is, bármikor, ha a *legkisebb* hatás elvét emlegeti valaki, akkor az általában csak egy megszokott elnevezés. Valójában inkább a *szélsőértékes* hatás elvére gondolunk, de az sokkal csúnyábban hangzik mind magyarul, mind angolul.[3]

Feltűnhetett, hogy mindkét példában az integrálás igazból egy-egy egyenes hosszának kiszámolására redukálódott. Ez csak didaktikus, és mutatja a Maupertuis elv hátrányát: mást nem igazán tudtunk volna kiszámolni. A probléma az integrálással van, hiszen azt nem mindig lehet elvégezni; és itt az integrálás **után** szelektáljuk ki az összes lehetséges útból az igazit. Ha kegyes a fizika, akkor létezik olyan módszer, ami ezeket megcseréli.

A Lagrange formalizmus

Felidézve, hogy a hatástól megköveteljük, hogy stacionárius legyen:

$$\delta\mathcal{S} = 0$$

Vegyünk rá most egy általánosabb alakot az eddigieknél. Legyen

$$\mathcal{S} = \int_A^B \mathcal{L}\Big(x(t), \dot{x}(t), t\Big)\mathrm{d}t$$

Hogy ez minimális legyen, alkalmazzuk a funkcionál deriválás szabályait: kapunk egy szép egyenletet az $\mathcal{L}$ **Lagrange-függvényünkre**:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}$$

az úgy nevezett **Euler-Lagrange**-egyenletet. Ez egyelőre még lehet, hogy csúnyábbnak tűnik mint az $\vec{F} = m\vec{a}$, de pont arra van a gyakorlat, hogy megbarátkozzunk vele. Úgy általánosságban két féle példával fogunk találkozni: lesznek a tipikus feladatok, ahol ezt kell használni ahogy van; és lesznek gondolkodósak, ahol ezt az egyenletet nem lehet csak úgy ráküldeni a problémára. Nézzünk először pár példát az utóbbira.

[3] A pontosságra törekedőknek a *stacionárius* a bevett szó.

1.3. példa: Eukleidész

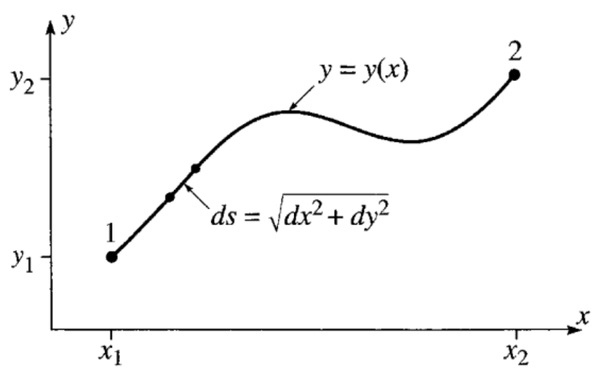
Az első kérdés amit segít megválaszolni a variációszámítás a következő:

Mi a legrövidebb út két pont között?

1.3.1. Paraméterezés

Próbáljunk meg elvonatkoztatni attól, hogy tudjuk a választ (egyenes). Ha ez megvolt, akkor rajzoljunk le valami általános görbét A és B pontok közt, ahogy azt a 3. ábrán láthatjuk. Végső soron arra leszünk kíváncsiak, hogy ennek a görbének a hossza mikor lesz minimális: tehát számunkra ő most az $\mathcal{S}$ hatás. Hogy őt megkapjuk egy integrállal, a görbe mentén kell felösszegeznünk a kis $\mathrm{d}s$ ívelemeket, tehát

$$\mathcal{S} = \int_A^B \mathrm{d}s \tag{1.3.1}$$



3. ábra. Egy $y(x)$ függvényként paraméterezett görbe A és B közt.

Amivel meg is van a feladat filozofálósabb része. Ami marad az az, hogy hogyan kell ezt az integrálást elvégezni: mik is a határok, és hogy függ tőlük az ívelem. Descartes-i koordinátákban dolgozva általánosan is igaz, hogy két pont közt a távolság $s^2 = x^2 + y^2$. Ez alapján az infinitezimális elmozdulásokra is valid lesz:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \tag{1.3.2}$$

Ami már majdnem jó, de nekünk csak x a változó, amitől függ maga az y, ezért azt a $\mathrm{d}y$-t el lehet tűntetni. Szorozzuk be eggyel:

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = y'(x)\mathrm{d}x \tag{1.3.3}$$

Ezzel a hatásintegrálunkat már fel tudjuk írni mint egy szokásos, x szerinti integrálás:

$$\mathcal{S} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\mathrm{d}x^2 + y'^2(x)\mathrm{d}x^2} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2(x)}\mathrm{d}x \tag{1.3.4}$$

1.3.2. Variáció

Megtaláltuk tehát, hogy mi az a Lagrange-függvény ami ezt a problémát írja le:

$$\mathcal{L}(y(x), y'(x)) = \sqrt{1 + y'^2(x)} \tag{1.3.5}$$

Ennek véve a deriváltjait:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = \frac{1}{2} \frac{2y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \tag{1.3.6}$$

Aztán felírhatjuk persze az Euler-Lagrange egyenletet, amihez kell még ez utóbbinak a teljes deriváltja. Most ez ki fog derülni, hogy felesleges, de gyakorlásként nézzük meg.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = \frac{y'' \times \sqrt{1 + y'^2} - y' \times \frac{y' y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{1 + y'^2} = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \tag{1.3.7}$$

$$= y'' \frac{\sqrt{1 + y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}}{1 + y'^2} \tag{1.3.8}$$

$$0 = y'' \left(1 - \frac{y'^2}{1 + y'^2}\right) \tag{1.3.9}$$

1.3.3. A mozgásegyenlet megoldása

Kaptunk egy szép másodrendű differenciálegyenletet a "mozgásra". Kicsit nézegetve ez kétféleképpen teljesülhet: egyrészt lehet a zárójel nulla

$$\left(1 - \frac{y'^2}{1 + y'^2}\right) = 0 \tag{1.3.10}$$

$$1 + y'^2 = y'^2 \tag{1.3.11}$$

$$1 = 0 \tag{1.3.12}$$

Szóval mégsem lehet az a zárójel nulla. Másrészt lehetséges megoldás még

$$y''(x) = 0 \tag{1.3.13}$$

$$y'(x) = m \tag{1.3.14}$$

$$y(x) = mx + b \tag{1.3.15}$$

az egyenes.

1.3.4. A szebb megoldás

Ehelyett, vegyük észre hogy az Euler-Lagrange egyenlet jobb oldala nulla:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \tag{1.3.16}$$

tehát

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = \frac{1}{2} \frac{2y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{konst.} \tag{1.3.17}$$

Még nevet nem adva a konstansnak, ez kicsit átírható:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{konst.} \tag{1.3.18}$$

$$\frac{y'^2}{1+y'^2} = \text{konst.} \tag{1.3.19}$$

$$y'^2 = \text{konst.} \tag{1.3.20}$$

$$y' = \text{konst.} \tag{1.3.21}$$

amit nevezzünk el végre:

$$y'(x) = m \tag{1.3.22}$$

Ezt integrálva x szerint megkapjuk a gyönyörű megoldást, miszerint:

$$y = mx + b \tag{1.3.23}$$

tehát két pont között a legrövidebb út az egyenes.

1.4. példa: Brachisztokron

Egy egészen hasonló, de történelmi jelentősségű példát kapunk, ha kicsit módosítunk az előző feladaton. Az alapkérdésünk most az, hogy (homogén) gravitációs térben milyen görbe az, amin legurulva a legkevesebb időbe telik az út A és B között. A legkevesebb időre törekszünk, tehát ami minimalizálandó az

$$\mathcal{S} = \int_A^B \mathrm{d}t \tag{1.4.1}$$

Felhasználva, hogy $v = s/t$, illetve az energiamegmaradásból kapott

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \tag{1.4.2}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2gy}} \tag{1.4.3}$$

összefüggést, ez átírható egy útra vett integrállá:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_A^B \frac{1}{\sqrt{y}} \mathrm{d}s \tag{1.4.4}$$

Már csak az a kérdés, hogy mi legyen ds. Az előző feladattal ellentétben most vehetjük[4] a *változónak* y-t, aminek függvénye az x, amivel

$$\mathrm{d}s^2 = [1 + x'^2(y)]\mathrm{d}y^2 \tag{1.4.5}$$

Így a hatásintegrálunk

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y_A}^{y_B} \frac{\sqrt{1+x'^2(y)}}{\sqrt{y}} \mathrm{d}y \tag{1.4.6}$$

Erre kell most alkalmaznunk az Euler-Lagrange formulát, ügyelve arra hogy most x és y kicserélődtek.

[4] Nem muszáj, de könnyebb így.

Az integrál előtti szorzófaktorokat elhagyva a deriváltak:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} \tag{1.4.7}$$

Az előző feladatból tanulva most nem számítjuk ki $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'}$-et, mert a másik nulla: tudjuk tehát, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} = \text{konst.} \tag{1.4.8}$$

$$\frac{1}{y} \frac{x'^2}{1+x'^2} = \text{konst.} = \frac{1}{2a} \tag{1.4.9}$$

ahol a konstans azért így van bevezetve, hogy később szép legyen a megoldás. Ez egy diffegyenlet, amit meg kell oldanunk. Kis rendezéssel

$$x'^2 = \frac{y}{2a} + \frac{y}{2a}x'^2 \tag{1.4.10}$$

$$x'^2 = \frac{\frac{y}{2a}}{1-\frac{y}{2a}} \tag{1.4.11}$$

$$x'^2 = \frac{y}{2a-y} \tag{1.4.12}$$

Ami felintegrálható, mint

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{2a-y}}\,\mathrm{d}y \tag{1.4.13}$$

Hogy ezt megoldjuk, megsejtjük a jó $y \to \varphi$ változócserét a tankönyv segítségével, mint

$$y = a(1-\cos\varphi) \tag{1.4.14}$$

Amivel

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} = a\sin\varphi \qquad \longrightarrow \qquad \mathrm{d}y = a\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \tag{1.4.15}$$

és

$$\frac{y}{2a-y} = \frac{a(1-\cos\varphi)}{2a-a+a\cos\varphi} = \frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} \tag{1.4.16}$$

Beírva mindkettőt, az integrandus

$$a\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{\cos\varphi}}\sin\varphi = a\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\sin^2\varphi} \tag{1.4.17}$$

$$= a\sqrt{\frac{\sin^2\varphi - \sin^2\varphi\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} \tag{1.4.18}$$

$$= a\sqrt{\frac{1-\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} \tag{1.4.19}$$

$$= a\sqrt{\frac{1-\cos^2\varphi - \cos\varphi + \cos^3\varphi}{1+\cos\varphi}} \tag{1.4.20}$$

$$= a\sqrt{\frac{(1+\cos\varphi(1-\cos\varphi)^2)}{1+\cos\varphi}} \tag{1.4.21}$$

$$= a(1-\cos\varphi) \tag{1.4.22}$$

Amit már könnyebb kiintegrálni, mint

$$x = a \int (1 - \cos\varphi)\mathrm{d}\varphi = a\,(\varphi - \sin\varphi) + \text{konst.} \tag{1.4.23}$$

Innentől a pontos megoldás már csak kezdeti értékek kérdése. Legyenek ők $x_A = y_A = 0$, amikből $\varphi = 0$ következik, illetve a konstansunk is nulla lesz. A megoldásunk tehát a görbére:

$$x = a\,(\varphi - \sin\varphi) \tag{1.4.24}$$

$$y = a(1 - \cos\varphi) \tag{1.4.25}$$

ahol φ parametrizálja a görbét. Ha eleget nézzük ezt a megoldást, szét tudjuk szedni pár darabra:

- a két változó rendre szinuszosan és koszinuszosa változik, ami valami körszerűre utal;
- x-hez viszont folyamatosan adódik egy extra φ tag, ami eltolja.

Ezek tudatában nem meglepő, hogy ez a görbe egy ciklois: az a görbe, amit akkor kapunk, ha elgurítva egy kereket követünk egy pontot annak a peremén.

Fermat elv

Kicsit közelebb kerülve a fizikához, most a két pont között utazzon valami létező dolog is: a fény. Itt amit minimalizálni szeretnénk az az idő, tehát a hatásintegrálunk

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}t$$

alakú kell, hogy legyen. Mivel $v = s/t$, így kis átrendezéssel megkapjuk azt az alakot, ami például helyfüggő törésmutatóknál használható:

$$\mathcal{S} = \int \frac{1}{v}\mathrm{d}s$$

A fény sebessége pedig egy n törésmutatójú közegben $v = c/n$, tehát:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{c}\int n(s)\mathrm{d}s$$

ahol a c elhagyható: nem azért mert 1, hanem mert nem befolyásolja azt, hogy hol a minimum [5].

1.5. példa: Gömbszimmetrikus törésmutató

Kicsit elszakadva a megszokott koordinátarendszertől, most vegyünk egy közeget, ahol a törésmutató

$$n(r) = n_0\frac{R}{r} \tag{1.5.1}$$

módon változik: fordítottan arányos az origótól való távolsággal. Felidézve a gömbi koordináták esetét, az ívelemnégyzet

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2 \tag{1.5.2}$$

[5] Ha n szintén konstanst, ez rá is igaz. Ergo bebizonyítottuk, hogy konstans törésmutató mellett a fény egyenesen terjed az előző példa alapján.

Már csak az a kérdés, hogy mi szerint szeretnénk integrálni. Két változónk van, r és φ, amik az út mentén valahogyan függnek egymástól. Most egyszerűbb a feladathoz úgy nekiállni, hogy r függ valahogyan a szögtől, tehát a sugárirányú megváltozást célszerű

$$\mathrm{d}r = r'\mathrm{d}\varphi \tag{1.5.3}$$

alakban írni. Ezzel az ívelemnégyzet:

$$\mathrm{d}s^2 = (r'^2 + r^2)\mathrm{d}\varphi^2 \tag{1.5.4}$$

Beírva mindent, a hatásintegrálunk

$$\mathcal{S} = n_0 R \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \frac{\sqrt{r'^2 + r^2}}{r}\mathrm{d}\varphi \tag{1.5.5}$$

Felismerve a Lagrange-függvényt, és kicsit átírva:

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{r'^2 + r^2}}{r} = \sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2}} \tag{1.5.6}$$

felírhatjuk az Euler-Lagrange-hoz szükséges deriváltakat:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r'^2}{r^2}}} \times r'^2 \frac{-2}{r^3} = -\frac{r'^2}{r^3}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r'^2}{r^2}}} \tag{1.5.7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r'} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r'^2}{r^2}}} \times \frac{1}{r^2}2r' = \frac{r'}{r^2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r'^2}{r^2}}} \tag{1.5.8}$$

Itt már egyik sem nulla, nincs mese, kell venni az utóbbinak a teljes deriváltját. Ezt szerintem szorzatfüggvényként célszerű, lebontva lépésekre:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{r'}{r^2} = \frac{r'' \times r^2 - r' \times 2rr'}{r^4} = \frac{1}{r^3}\left(r''r - 2r'^2\right) \tag{1.5.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r'^2}{r^2}}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+\frac{r'^2}{r^2}\right)^{3/2}} \times \frac{2r'r'' \times r^2 - r'^2 \times 2rr'}{r^4} \tag{1.5.10}$$

$$= -\frac{1}{r^3}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r'^2}{r^2}}}\frac{1}{1+\frac{r'^2}{r^2}}\left(rr'r'' - r'^3\right) \tag{1.5.11}$$

Ha ezek megvannak, a teljes deriválthoz csak össze kell kombinálni őket:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r'} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{r'^2}{r^2}}} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{r'}{r^2} + \frac{r'}{r^2} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r'^2}{r^2}}} \tag{1.5.12}$$

$$= \frac{1}{r^3}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r'^2}{r^2}}}\left(r''r - 2r'^2 - \frac{r'}{r^2}\frac{rr'r'' - r'^3}{1+\frac{r'^2}{r^2}}\right) \tag{1.5.13}$$

$$= \frac{1}{r^3}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r'^2}{r^2}}}\left(r''r - 2r'^2 - r'^2\frac{rr'' - r'^2}{r^2 + r'^2}\right) \tag{1.5.14}$$

Végül pedig fel tudjuk írni a mozgást megvalósító pálya Euler-Lagrange egyenletét:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r'}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r}=0 \tag{1.5.15}$$

$$\frac{1}{r^3}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r'^2}{r^2}}}\left(r''r-2r'^2-r'^2\frac{rr''-r'^2}{r^2+r'^2}+r'^2\right)=0 \tag{1.5.16}$$

$$\Uparrow \tag{1.5.17}$$

$$r''r-r'^2-r'^2\frac{rr''-r'^2}{r^2+r'^2}=0 \tag{1.5.18}$$

Kis átalakítással

$$r''r-r'^2-\frac{rr'r''-r'^3}{1+\frac{r'^2}{r^2}}=\left(r''r-r'^2\right)\left(1-\frac{r'^2}{r^2+r'^2}\right)=0 \tag{1.5.19}$$

Láthatólag ez kétféleképpen teljesülhet. Az egyik opció:

$$\left(1-\frac{r'^2}{r^2+r'^2}\right)=0 \tag{1.5.20}$$

$$r^2+r'^2=r'^2 \tag{1.5.21}$$

$$r(\varphi)=0 \tag{1.5.22}$$

Ami a triviális megoldás: nem történik semmi. A másik kissé izgalmasabb:

$$\left(r''r-r'^2\right)=0 \tag{1.5.23}$$

Keressük azokat az $r(\varphi)$ függvényeket, amelyek teljesítik ezt az egyenletet. Kissé átírva

$$r''r=r'^2 \tag{1.5.24}$$

$$\frac{r''}{r}=\frac{r'^2}{r^2} \tag{1.5.25}$$

Nem baj, ha ezt még nem látjuk mi lesz. A jobb oldal minden esetre egészen szép, szóval vezessünk be egy új u függvényt, mint

$$u(\varphi)=\frac{r'}{r} \tag{1.5.26}$$

Mi lesz az ő deriváltja?

$$u'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{r'}{r}=\frac{r''\times r-r'\times r'}{r^2}=\frac{r''}{r}-\frac{r'^2}{r^2} \tag{1.5.27}$$

A fentiek alapján viszont ennek a jobb oldala nulla. Ergo

$$u'=0 \qquad\longrightarrow\qquad u=\text{konst.}=c \tag{1.5.28}$$

Visszaírva az u definíciójába

$$\frac{r'}{r}=c \qquad\longrightarrow\qquad r(\varphi)=A\exp\left(c\varphi\right) \tag{1.5.29}$$

Ezt láthatólag nem volt könnyű megoldani. Itt bukik elő a variációszámítás egyik hátránya: attól, hogy könnyen fel tudjuk írni a mozgásegyenletet, nem biztos, hogy azt egyszerűen (vagy egyáltalán) meg is tudjuk oldani. A következő órákon erre a feladatra látni fogunk majd egy kevésbé favágó módszert, ami (mint a legtöbb szép megoldás a fizikában) a szimmetriákra alapul.