2. óra

Elméleti frissítő

A Lagrange-i mechanika kezdeteként feltettük, hogy léteznek valamilyen $\mathcal{L}$ Lagrange-függvények, amelyekből össze tudunk tákolni egy hatást

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)\,\mathrm{d}t$$

amely ha stacionárius

$$\delta\mathcal{S} = 0$$

akkor a megoldások a fizikai valóságot írják le. Ezt megkövetelve, ha alkalmazzuk a funkcionális deriválás szabályait, kapunk egy szép egyenletet magára az $\mathcal{L}$ Lagrange-függvényünkre:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}(r(t),\dot{r}(t))}{\partial\dot{r}(t)} = \frac{\partial\mathcal{L}(r(t),\dot{r}(t))}{\partial r(t)}}$$

az **Euler-Lagrange-egyenletet.** Múlt órán néztünk pár gondolkodást igénylő geometriai példát, ahol ezt a Lagrange-függvényt nekünk kellett kitalálni úgy, hogy az adott feladatot írja le. Szerencsére a továbbiakban ez könnyebb lesz.

Klasszikus mechanika

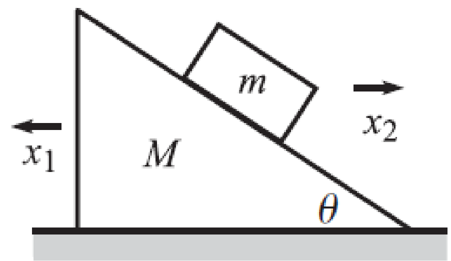
Térjünk át a tipikus mechanikai feladatokra. Ekkor a hatásunk alakja

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))\mathrm{d}t = \int \Big(K(\dot{\vec{r}}, \vec{r}) - V(\vec{r})\Big)\,\mathrm{d}t$$

mert akkor az Euler-Lagrange egy ismerős egyenletre vezet:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p} = \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}}} = -\nabla V(\vec{r})$$

Ez hasznos, mert a kinetikus és a potenciális energiákat már ismerjük: az előbbi mindig $\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$, a második pedig a rendszerből adódik. Ezt kihasználva tetszőleges mechanikai feladatokra fel tudjuk írni a Lagrange-függvényt a kinetikus és potenciális energiákat építőkockaként használva.



1. ábra. Csúszó ék ábrája.

2.1. példa: Csúszó ék

Első példaként vegyünk egy asztalt. Rakjunk rá egy háromszög alakú, M tömegű éket, ami súrlódás mentesen tud rajta mozogni. Erre az ékre pedig rakjunk rá egy m tömegű téglatestet, ami szintén súrlódás nélkül le tud csúszni rajta. Ha engedjük lecsúszni a kis téglatestet, *mekkora lesz az ék gyorsulása?*

Kezdjük az első lépéssel:

2.1.1. Mi a hatás?

Kell nekünk a $\mathcal{L}$ Lagrange-függvényünk két része: a kinetikus és a potenciális energia. Az utóbbi itt könnyebb: ahogy csúszik lefele a téglatest, csökken a gravitációs potenciálja. Tehát:

$$\Delta V = mg\Delta h \tag{2.1.1}$$

amit paraméterezni kell majd valahogy szépen. Addig is emlékezzünk, hogy bárhol megválaszthatjuk a nullpontját, de lefelé menve csökkenni fog.

A kinetikus energiánk már picit több tagból áll: az m test is tud mozogni és az M is. Tehát:

$$K = \frac{1}{2}M\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}M\dot{y_1}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x_2}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y_2}^2 \tag{2.1.2}$$

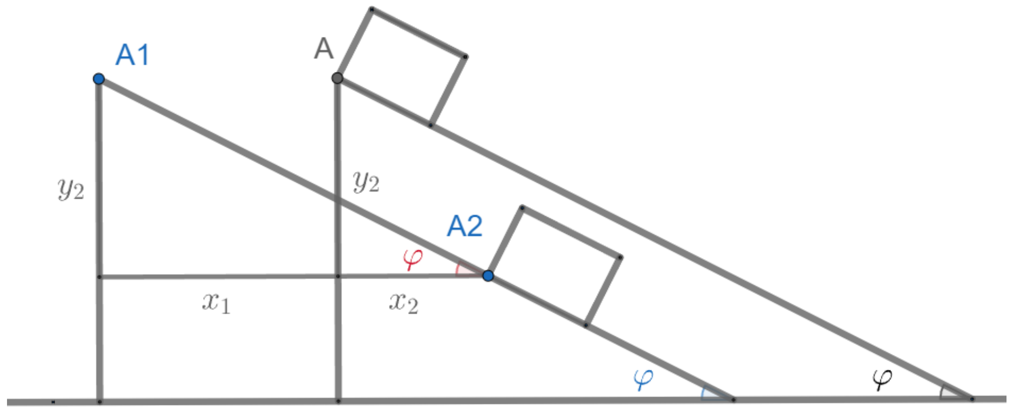
Ami általánosan szép és jó, viszont elviekben még semmi nem zárja ki, hogy a kis téglatestünk egyenesen átessen a háromszögön, a nagy háromszögünk pedig az asztalon. Ehhez egy-egy **kényszert** kell kiróni: az m test **kényszeresen** az ék felületén közlekedik lefelé, az M test pedig egyáltalán nem mozoghat fel-le.

Ahhoz, hogy ez a kényszer teljesüljön, matekká kell fogalmazni amit szeretnénk kiróni. Kezdjük a háromszöggel: ha valami nem mozoghat fel-le, akkor

$$y_1 = \text{konst.} \qquad \longrightarrow \qquad \dot{y_1} = 0 \tag{2.1.3}$$

A kis téglatestünk úgy közlekedik lefelé, hogy végig a háromszög élén marad. Ehhez segítségül hívjuk a 2. ábrát. Azt látjuk, hogy össze tudjuk kötni a kis téglatest y irányú, y_2 mértékű lecsúszását azzal, hogy mennyit mozogtak x irányba a testek. Kis matekkal:

$$y_2 = (x_1 + x_2)\tan\varphi \tag{2.1.4}$$



2. ábra. Pár szög és szakasz ami segít a kényszer felírásában.

Ez kétrétről is hasznos lesz: egyrészt a potenciális energiába pont ezt a magasságmegváltozást kerestük:

$$\Delta V = -mgy_2 \tag{2.1.5}$$

másrészt pedig be tudjuk helyettesíteni a kinetikus energiába is, mivel

$$\dot{y_2} = (\dot{x_1} + \dot{x_2}) \tan\varphi \tag{2.1.6}$$

Felírva tehát, a teljes Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x_2}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x_1} + \dot{x_2})^2 \tan^2\varphi + mg(x_1 + x_2)\tan\varphi \tag{2.1.7}$$

2.1.2. Mik a mozgásegyenletek?

Két testünk mozog ebben a rendszerben, amiknek az $(x_1, \dot{x_1})$ és $(x_2, \dot{x_2})$ koordinátáival felírtuk a hatást. Hogy megkapjuk a mozgásegyenleteket, egyszerűen az Euler-Lagrange egyenleteket kell felírnunk a két testre. Kezdve az elsővel:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} = mg\tan\varphi \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x_1}} = M\dot{x_1} + m\tan^2\varphi(\dot{x_1} + \dot{x_2}) \tag{2.1.8}$$

tehát az ék mozgásegyenlete:

$$mg\tan\varphi = M\ddot{x_1} + m\tan^2\varphi(\ddot{x_1} + \ddot{x_2}) \tag{2.1.9}$$

A kis téglatestünkre is fel lehet írni ugyanezeket: vegyük észre, hogy szinte teljesen szimmetrikus a Lagrange-ünk, annyi a különbség a két változó közt, hogy a kitneikus tagban más tömeg szerepel. A kis m tömegű test egyenlete tehát:

$$mg\tan\varphi = m\ddot{x_2} + m\tan^2\varphi(\ddot{x_1} + \ddot{x_2}) \tag{2.1.10}$$

2.1.3. Mi a pálya?

Hogy megkapjuk a trajektóriákat, meg kell oldanunk a mozgásegyenleteket. Na, ez az a lépés ami általánosságban nem lehetséges algebrailag. Szerencsére viszont léteznek feladatgyűjtemények olyan példákkal amikre igen: ez például pont megoldható. Vegyük a két mozgásegyenlet különbségét:

$$0 = M\ddot{x_1} - m\ddot{x_2} \tag{2.1.11}$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p_{1,x} - p_{2,x}\right) \tag{2.1.12}$$

ami igazából ismerős lehet:

$$p_{1,x} - p_{2,x} = \text{konst.} \tag{2.1.13}$$

ez nem más, mint az x irányú lendület megmaradása (a fordított előjelet az okozza, hogy az ék elmozdulását ellenkező irányúnak vettük fel a téglatestéhez képest). Visszaidézve az első órát, itt is láthatjuk, hogy eltolásinvariáns a rendszerünk erre az irányra, amivel ez az eredmény konzisztens.

Minden esetre, megvan a két egyenlet amit meg kell oldani. Ezeket kicsit átrendezve:

$$mg\tan\varphi - m\tan^2\varphi\ddot{x_2} = (M + m\tan^2\varphi)\ddot{x_1} \tag{2.1.14}$$

$$mg\tan\varphi - m\tan^2\varphi\ddot{x_1} = m(1 + \tan^2\varphi)\ddot{x_2} \tag{2.1.15}$$

be tudjuk helyettesítni az elsőbe $\ddot{x_2}$-t, amivel

$$(M + m\tan^2\varphi)\ddot{x_1} = mg\tan\varphi - m\tan^2\varphi\frac{g\tan\varphi - \tan^2\varphi\ddot{x_1}}{(1 + \tan^2\varphi)} \tag{2.1.16}$$

$$\left(M + m\tan^2\varphi - m\frac{\tan^4\varphi}{1 + \tan^2\varphi}\right)\ddot{x_1} = mg\tan\varphi - m\tan^2\varphi\frac{g\tan\varphi}{1 + \tan^2\varphi} \tag{2.1.17}$$

Vegyük észre hogy $1 + \tan^2 = 1/\cos^2$, így pár szögfüggvényes egyszerűsítés után

$$\left(M + m\tan^2\varphi - m\frac{\sin^4\varphi}{\cos^2\varphi}\right)\ddot{x_1} = mg\tan\varphi - m\sin^2\varphi g\tan\varphi \tag{2.1.18}$$

$$\left(M + m\sin^2\varphi\frac{1 - \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)\ddot{x_1} = mg\tan\varphi(1 - \sin^2\varphi) \tag{2.1.19}$$

$$\left(M + m\sin^2\varphi\right)\ddot{x_1} = mg\tan\varphi\cos^2\varphi \tag{2.1.20}$$

$$\left(M + m\sin^2\varphi\right)\ddot{x_1} = mg\cos\varphi\sin\varphi \tag{2.1.21}$$

$$\ddot{x_1} = \frac{mg\cos\varphi\sin\varphi}{M + m\sin^2\varphi} \tag{2.1.22}$$

amivel meg is válaszoltuk a kérdést: ezzel a konstans gyorsulással fog mozogni az ékünk.

Ha a mozgás időfüggésére vagyunk kíváncsiak, akkor ezt még ki kell integrálni kétszer. Emlékeztetőül

$$\ddot{x_1} = a_1 \tag{2.1.23}$$

$$\int \ddot{x_1}\mathrm{d}t = \int a_1\mathrm{d}t \tag{2.1.24}$$

$$\dot{x_1} = a_1 t \tag{2.1.25}$$

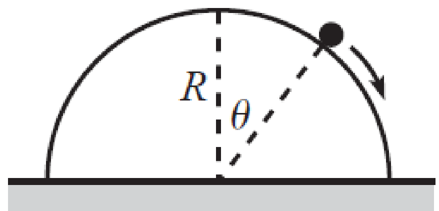
$$\int \dot{x_1}\mathrm{d}t = \int a_1 t\,\mathrm{d}t \tag{2.1.26}$$

$$x_1(t) = \frac{a_1}{2}t^2 + c_1 \tag{2.1.27}$$

A másik pedig ugyanígy, $a_2 = \frac{M}{m}a_1$ gyorsulással.

2.2. példa: Félkörről lecsúszás - 1

Vegyünk egy asztalt, és szögezzünk rá egy félkört. Ezután rakjunk rá egy kis tömegpontot, ami súrlódásmentesen lecsúszhat: *mi lesz a mozgásegyenlet?*



3. ábra. Félkör alakú ékről való lecsúszás.

Először írjuk fel a feladatot Descartes-i koordinátarendszerben. Kényszerek nélkül, a kinetikus tagban lehetne bármi:

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \tag{2.2.1}$$

a potenciális energiánkat pedig felvehetjük, mint

$$V = -mg(R-y) \tag{2.2.2}$$

Persze tudjuk, hogy a mozgás itt csak a félkör felületén történhet: ez matekul annyit tesz, hogy

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{2.2.3}$$

Ezzel pedig ki tudjuk fejezni valamelyik változónkat a másik függvényében. Legyen most ez $x(y)$, mert a potenciális energiában már amúgy is y van.

$$x = \sqrt{R^2 - y^2} \tag{2.2.4}$$

Az ő deriváltja:

$$\dot{x} = \frac{y\dot{y}}{\sqrt{R^2-y^2}} \tag{2.2.5}$$

Így a Lagrange-unk:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2\left(1 + \frac{y^2}{R^2-y^2}\right) + mg(R-y) \tag{2.2.6}$$

Ha ezzel megvagyunk, felírhatjuk az Euler-Lagrange egyenlet két tagját:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2\frac{2y(R^2-y^2)+2y^2\cdot y}{(R^2-y^2)^2} - mg \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}} = m\dot{y}\left(1+\frac{y^2}{R^2-y^2}\right) \tag{2.2.7}$$

amihez még deriválni kell egyet:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}} = m\left[\ddot{y}\left(1+\frac{y^2}{R^2-y^2}\right) + \dot{y}^2\frac{2y(R^2-y^2)+2y^3}{(R^2-y^2)^2}\right] \tag{2.2.8}$$

Egyenlővé téve amit kell, és kicsit átalakítva:

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2\frac{2y(R^2-y^2)+2y^2\cdot y}{(R^2-y^2)^2}-mg=m\left[\ddot{y}\left(1+\frac{y^2}{R^2-y^2}\right)+\dot{y}^2\frac{2y(R^2-y^2)+2y^3}{(R^2-y^2)^2}\right] \tag{2.2.9}$$

$$\dot{y}^2\frac{y(R^2-y^2)+y^3}{(R^2-y^2)^2}-g=\ddot{y}\left(1+\frac{y^2}{R^2-y^2}\right)+2\dot{y}^2\frac{y(R^2-y^2)+y^3}{(R^2-y^2)^2} \tag{2.2.10}$$

$$-\dot{y}^2\frac{y(R^2-y^2)+y^3}{(R^2-y^2)^2}-g=\ddot{y}\left(1+\frac{y^2}{R^2-y^2}\right) \tag{2.2.11}$$

Ez nem túl szép. Vezessük be a tömegpont helyzetét leíró szöget, amivel

$$y=R\cos\varphi \tag{2.2.12}$$

Ennek hála

$$R^2-y^2=R^2(1-\cos^2\varphi)=R^2\sin^2\varphi \tag{2.2.13}$$

Beírva a mozgásegyenletbe, leegyszerűsödik pár dolog:

$$-\dot{y}^2y\frac{R^2\sin^2\varphi+y^2}{(R^2\sin^2\varphi)^2}-g=\ddot{y}\left(1+\frac{R^2\cos^2\varphi}{R^2\sin^2\varphi}\right) \tag{2.2.14}$$

$$-\dot{y}^2y\frac{R^2\sin^2\varphi+R^2\cos^2\varphi}{(R^2\sin^2\varphi)^2}-g=\ddot{y}\left(\frac{R^2\sin^2\varphi+R^2\cos^2\varphi}{R^2\sin^2\varphi}\right) \tag{2.2.15}$$

$$-\dot{y}^2y\frac{1}{R^2\sin^4\varphi}-g=\ddot{y}\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}\right) \tag{2.2.16}$$

Beírva végül, hogy

$$\dot{y}=-R\sin\varphi\dot{\varphi}\qquad\ddot{y}=-R(\dot{\varphi}^2\cos\varphi+\sin\varphi\ddot{\varphi}) \tag{2.2.17}$$

Először

$$-R^3\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi\cos\varphi\frac{1}{R^2\sin^4\varphi}-g=\ddot{y}\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}\right) \tag{2.2.18}$$

$$-\dot{\varphi}^2R\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}-g=\ddot{y}\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}\right) \tag{2.2.19}$$

aztán

$$-\dot{\varphi}^2R\cos\varphi-g\sin^2\varphi=-R(\dot{\varphi}^2\cos\varphi+\sin\varphi\ddot{\varphi}) \tag{2.2.20}$$

$$\ddot{\varphi}=\frac{g}{R}\sin\varphi \tag{2.2.21}$$

Ezt nem triviális megoldani, szóval egyelőre így hagyjuk. Láthatóan egy hosszadalmas feladattal küzdöttünk meg, amin az segített, hogy áttértünk egy új változóra a szög segítségével. Sok fáradalmat megspórolhatunk a jövőben, ha ezt ezek után hamarabb megtesszük, például már a legelején.

Általános koordináták

Eddig a Descartes-i koordinátákban mozogtunk, de ennek különös fizikai szerepe nincsen: bármely más koordinátarendszerben is szeretnénk, hogy a fizika érvényes legyen. A variációs módszereknek itt jön be mégegy előnye a Newtoni mechanikával szemben: a mozgást leíró egyenletünk pont ugyanúgy néz ki (szinte) minden koordinátarendszerben. Általános q koordinátákkal:

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))\mathrm{d}t$$

lesz a hatásunk, amire az Euler-Lagrange alakja változatlan

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

Nézzünk is egy pár példát, ahol látjuk ennek a jelentősségét.

2.3. példa: Félkörről lecsúszás - 2

Jól látható ennél a feladatnál, hogy sokat egyszerűsít, ha áttérünk a konfigurációnkhoz jobban illeszkedő változóra: a szögre. Ezt az előbb a mozgásegyenlet levezetése után tettük meg. A Lagrange-i mechanikában viszont rögtön az első lépésben, a hatás felírásánál is tudunk élni ezzel az egyszerűsítéssel. A változónak most a szöget véve, a kinetikus energiánk:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m\dot{y}^2\left(1 + \frac{y^2}{R^2 - y^2}\right) && (2.3.1)\\ &= \frac{1}{2}mR^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2\left(1 + \frac{R^2\cos^2\varphi}{R^2\sin^2\varphi}\right) && (2.3.2)\\ &= \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2R^2\sin^2\varphi\left(\frac{R^2}{R^2\sin^2\varphi}\right) && (2.3.3)\\ &= \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2R^2 && (2.3.4)\end{aligned}$$

Amit most behelyettesítve számoltunk ki, de egyébként abból is kiindulhattunk volna, hogy mi az érintőirányú sebesség egy kör mentén (sugár · szögsebesség). Én inkább a behelyettesítéses számolást ajánlom: lesznek olyan példák, ahol az utóbbi módszer félrevezet, ha nem vagyunk óvatosak. A potenciális energia szintén egyszerű:

$$\begin{aligned} V &= -mgy && (2.3.5)\\ &= -mgR(1 - \cos\varphi) && (2.3.6)\\ &= -mgR + mgR\cos\varphi && (2.3.7)\end{aligned}$$

használjuk ki, hogy ez tetszőlegesen eltolható egy konstanssal, és legyen:

$$V = mgR\cos\varphi \tag{2.3.8}$$

Így a Lagrange-unk szép tömör alakot ölt:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2R^2 - mgR\cos\varphi \tag{2.3.9}$$

És az Euler-Lagrange is egyszerűbb:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = mgR\sin\varphi \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi} \tag{2.3.10}$$

amiből egy deriválás után

$$mR^2\ddot{\varphi} = mgR\sin\varphi \tag{2.3.11}$$

Tehát a mozgásegyenlet:

$$R\ddot{\varphi} = g\sin\varphi \tag{2.3.12}$$

Ez jóval kevesebb lépésbe került, mint derékszögű koordinátákkal. Ez az egyenlet pár trükkel megoldható, de helyette most nézzünk meg egy speciális esetet: mi van a félgömb tetejéhez közel, ahol $\varphi \ll 1$?

$$\sin\varphi \approx \varphi \tag{2.3.13}$$

Tehát

$$\ddot{\varphi} \approx \frac{g}{R}\varphi \tag{2.3.14}$$

Ez egy nevezetes diffegyenlet: valamilyen függvény második deriváltja arányos önmagával. Megoldása:

$$\varphi(t) \approx c_1 e^{\sqrt{\frac{g}{R}}t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{R}}t} \tag{2.3.15}$$

Energiamegmaradás

A gyakorlatban az egy dimenziós példák gyakran még tovább egyszerűsödnek. Mindeddig nem használtunk ki egy erős eszközt: az energiamegmaradást. Ugyanis ha a Lagrange-függvényünk nem függ *expliciten* az időtől, akkor létezik egy mennyiség, ami megmarad: őt (általánosított) **energiának** hívjuk.

$$\mathcal{L}\big(r(t), \dot{r}(t), \cancel{t}\big) \quad \longrightarrow \quad E = \dot{\vec{r}}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} - \mathcal{L} = \text{konst.}$$

Ennek egy speciális esete a klasszikus mechanika, ugyanis ekkor

$$E = K + V \tag{2.3.16}$$

az energia nem más mint a kinetikus és potenciális energiák összege.

Ha őt kihasználjuk, minden eddig vett példa leegyszerűsödik; és új feladatok válnak könnyen (vagy legalábbis könnyebben) megoldhatóvá. Nézzük például az előzőt!

2.4. példa: Félkörről lecsúszás - 3

Idézzük vissza a Lagrange-függvényünket:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2R^2 - mgR\cos\varphi \tag{2.4.1}$$

És a belőle kapott *lendületet*:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi} \tag{2.4.2}$$

Használjuk ki az energiamegmaradást! Ez felírva

$$\dot{\varphi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} - \mathcal{L} = E \tag{2.4.3}$$

$$mR^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2R^2 + mgR\cos\varphi = E \tag{2.4.4}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2R^2 + mgR\cos\varphi = E \tag{2.4.5}$$

Nem lepődünk meg, hogy tényleg $K + V$ alakú. Az energia viszont konstans: vegyük referencia értéknek azt, amikor fent csücsül a golyó és $E = mgR$. Ezt beírva, és kicsit átírogatva az egyenletet:

$$\frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2R^2 + mgR\cos\varphi = mgR \tag{2.4.6}$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos\varphi) \tag{2.4.7}$$

$$\dot{\varphi} = \pm\sqrt{2}\sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{1 - \cos\varphi} \tag{2.4.8}$$

Egy *elsőrendű* diffegyenletet kaptunk. Most ezt oldjuk, meg, hogy gyakoroljuk a diffegyenletek megoldását is. Először is a tömörség kedvéért legyen $\omega = \sqrt{g/R}$, és nézzük csak a pozitív megoldást.

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2}\,\omega\sqrt{1 - \cos\varphi} \tag{2.4.9}$$

$$\mathrm{d}\varphi = \sqrt{2}\,\omega\sqrt{1 - \cos\varphi}\mathrm{d}t \tag{2.4.10}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \cos\varphi}}\mathrm{d}\varphi = \sqrt{2}\,\omega\mathrm{d}t \tag{2.4.11}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1 - \cos\varphi}}\mathrm{d}\varphi = \int\sqrt{2}\,\omega\mathrm{d}t \tag{2.4.12}$$

Ennek mindkét oldala kiintegrálható, kezdjük a jobbal:

$$\int\frac{1}{\sqrt{1 - \cos\varphi}}\mathrm{d}\varphi = \sqrt{2}\,\omega t \tag{2.4.13}$$

A bal már nehezebb, ott már fordulhatunk szimbolikus integrálszámító programokhoz. Ha nem hagyatkoznánk a gépre, akkor viszont segítenek köztes lépésként a következő tippek:

$$1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \tag{2.4.14}$$

$$u := \tan\frac{\varphi}{4} \tag{2.4.15}$$

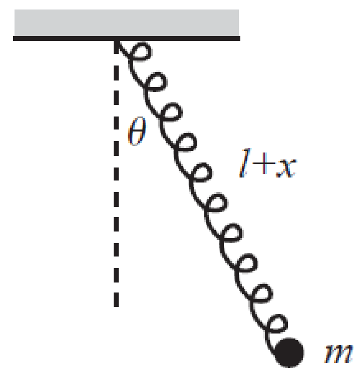
Ezekkel leredukálódik a problémánk $\int 1/u du$ alakra, amit már meg tudunk oldani. Visszahelyettesítve mindent

$$\ln\tan\frac{\varphi}{4} + c = \omega t \tag{2.4.16}$$

Ezt még invertálni kell $\varphi(t)$-re:

$$\varphi(t) = 4\arctan\left(Ce^{\omega t}\right) \tag{2.4.17}$$

ahol a konstans c-t kicseréltük egy C-re. Ezzel megkaptuk az egzakt megoldásunkat, hála az energiamegmaradásnak.



4. ábra. Rugós inga rajza. Itt x helyett R-el fogom jelölni a megnyúlását, az eredeti hosszát pedig l_0-al.

2.5. példa: Rugós inga

Vegyünk egy sima matematikai ingát, ami alapjáraton l hosszúságú, és egy m tömegű testet tart. Cseréljük ki a madzagot egy k rugóállandójú rugóra: *mi lesz ekkor a mozgásegyenlet?*

2.5.1. Descartes

Bemelegítésként először írjuk fel a sima inga problémáját Lagrange-osan, Descartes-i koordinátákkal. A kényszermentes Lagrange-függvény két tagja, ha origónak a felfüggesztési pontot vesszük:

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \tag{2.5.1}$$

$$V = -mg(l - y) \tag{2.5.2}$$

Ezt még ki kell egészítenünk azzal a feltétellel, hogy a test csak az l hosszúságú drót által rajzolt körön mozog. Most direkt távol maradva a szögektől, ez egy kis Pitagorasz tétel után:

$$l^2 = x^2 + y^2 \tag{2.5.3}$$

$$y = \sqrt{x^2 - l^2} \tag{2.5.4}$$

tehát

$$\dot{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{x^2 - l^2}) = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2 - l^2}} \tag{2.5.5}$$

amivel

$$\dot{y}^2 = \frac{x^2\dot{x}^2}{x^2 - l^2} \tag{2.5.6}$$

Beírva mindent a Lagrange-ba:

$$\mathcal{L}_{\text{inga}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + \frac{x^2}{x^2 - l^2}\right) + mg(l - \sqrt{x^2 - l^2}) \tag{2.5.7}$$

És ez még csak maga az inga. Ha belevesszük a rugót is:

$$V_{\text{rugó}} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 \tag{2.5.8}$$

ahol Δl fejezi ki, hogy mennyire nyúlt meg a rugó az eredeti l_0-hoz képest. Descartes-i koordinátákkal:

$$x^2 + y^2 = l^2 = (l_0 + \Delta l)^2 \tag{2.5.9}$$

$$\Delta l = \sqrt{x^2 + y^2} - l_0 \tag{2.5.10}$$

amivel

$$V_{\text{rugó}} = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2 + y^2} - l_0\right)^2 \tag{2.5.11}$$

És itt meg is állnék, mielőtt elkezdünk tovább helyettesítgetni. Szerintem sikerült demonstrálni, hogy mennyire el tudnak bonyolódni a tagok, ha a feladathoz rosszul illeszkedő koordinátarendszert választunk. Nézzük meg, hogy hogyan kell ezt szépen megoldani.

2.5.2. Polár

Hogy kiválasszuk a jó koordinátákat, gondolkodjunk kicsit a feladaton. Két dolgunk van: ingánk és rugónk. Az inga nagyon illeszkedik a poláros koordinátázáshoz. A rugóban pedig az jelenik meg, hogy mennyit nyúl meg sugárirányban. Legyen a két változónk φ, az inga kitérési szöge, és R, az inga megnyúlása az eredeti l_0 hosszához képest. A régi változók nyelvén tehát:

$$x^2 + y^2 = l^2 = (l_0 + R)^2 \tag{2.5.12}$$

$$x = l\sin\varphi = (l_0 + R)\sin\varphi \tag{2.5.13}$$

$$y = l\cos\varphi = (l_0 + R)\cos\varphi \tag{2.5.14}$$

Milyen sebességek jelennek meg a kinetikus tagban? Lesz egyrészt a sugárirányú sebesség, ami azt mondja meg, hogy mennyire változik éppen R:

$$K_r = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 \tag{2.5.15}$$

és lesz egy erre merőleges komponens, ami az érintő irányú sebesség lesz. Ez pedig a $\dot{\varphi}$ szögsebesség szorozva a $(l_0 + R)$ sugárral, tehát

$$K_\varphi = \frac{1}{2}m(l_0 + R)^2\dot{\varphi}^2 \tag{2.5.16}$$

A rugó potenciális energiája így már nagyon egyszerű:

$$V_{\text{rugó}} = \frac{1}{2}kR^2 \tag{2.5.17}$$

Cserébe a gravitációs potenciális energiánk lesz picit csúnyább:

$$V_{\text{grav.}} = -mg(l_0 + R)\cos\varphi \tag{2.5.18}$$

ahol az y helyére behelyettesítettük az új koordinátákat.

Egy szó mint száz, kész is a Lagrange-unk:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 + \frac{1}{2}m(l_0 + R)^2\dot{\varphi}^2 + mg(l_0 + R)\cos\varphi - \frac{1}{2}kR^2 \tag{2.5.19}$$

és jöhetnek is az Euler-Lagrange egyenletek. Két változónk van, tehát kettő lesz:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R} = m(l_0 + R)\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi - kR \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{R}} = m\dot{R} \tag{2.5.20}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = -mg(l_0 + R)\sin\varphi \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = m(l_0 + R)^2\dot{\varphi} \tag{2.5.21}$$

Amikkel elvégezve a deriválásokat:

$$(l_0+R)\dot\varphi^2 + g\cos\varphi - \frac{k}{m}R = \ddot R \tag{2.5.22}$$

$$-g(l_0+R)\sin\varphi = 2(l_0+R)\dot R\dot\varphi + (l_0+R)^2\ddot\varphi \tag{2.5.23}$$

Kicsit még szépítve:

$$\ddot R = (l_0+R)\dot\varphi^2 + g\cos\varphi - \frac{k}{m}R \tag{2.5.24}$$

$$(l_0+R)\ddot\varphi = -2\dot R\dot\varphi - g\sin\varphi \tag{2.5.25}$$

Ezt már be lehet küldeni a kedvenc numerikus megoldónknak, és meg is lesznek a pályák.

Teljes derivált

Előadáson elhangzott, hogy a fizika invariáns marad arra, ha a Lagrange-függvényhez hozzáadunk egy teljes deriváltat:

$$\mathcal{L} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$$

feltéve hogy a függvény alakja $F(t,q,\cancel{\dot q})$, tehát csak a koordinátáktól és az időtől függhet, a sebességektől nem. Ezt gyorsan bebizonyítjuk, belátva hogy az Euler-Lagrange egyenlet ekkor is teljesül:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot q} = \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial q} \tag{2.5.26}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q} + \frac{\partial}{\partial\dot q}\dot F\right] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial\dot F}{\partial q} \tag{2.5.27}$$

Mindkét oldalról kiesik az első tag, hála a sima, teljes derivált nélküli Euler-Lagrange egyenletnek. Ami marad:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot q}\dot F = \frac{\partial\dot F}{\partial q} \tag{2.5.28}$$

Ennek a tovább fejtéséhez először is nézzük meg hogyna néz ki F teljes időderiváltja, $\dot F$. Mivel $F(t,q)$ alakú, ezért két módon függhet az időtől: expliciten t-n keresztül, és impliciten $q(t)$-n át. Tehát

$$\dot F = \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial q}\dot q + \frac{\partial}{\partial t}F \tag{2.5.29}$$

Hogy függhet ez a kifejezés $\dot q$-től? Mivel F önmagában sehogy, egyetlen helyen hat a $\dot q$ szerinti parciális deriválás:

$$\frac{\partial}{\partial\dot q}\dot F = \frac{\partial F}{\partial q}\cdot 1 + 0 \tag{2.5.30}$$

Alkalmazzuk ugyanezt a logikát most F helyett az így kapott $\frac{\partial F}{\partial q}$-ra:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial q}\dot q + \partial_t\frac{\partial F}{\partial q} \tag{2.5.31}$$

A parciális deriváltak egymással felcserélhetők egy szép tételnek hála, így összességében

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial t} \tag{2.5.32}$$

$$= \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial t}\right] \tag{2.5.33}$$

$$= \frac{\partial \dot{F}}{\partial q} \tag{2.5.34}$$

amivel be is bizonyítottuk a feltevésünket.

2.6. példa: Egy csúnyának tűnő feladat

A gonosz feladatgyűjtemény a következő Lagrange-függvénnyel szembesít minket:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \dot{x}^2 - (x+t)^2 - \dot{x}t^2 \tag{2.6.1}$$

majd azt kéri, hogy használjuk az energiamegmaradást a feladat megoldására. Ez egy hibának tűnhet, mert a Lagrange explicit időfüggő: ekkor nem maradhat meg az energia. Oldjuk meg mégis, a most tanult új trükköt alkalmazva.

Először is bontsuk szét a zárójelet:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \dot{x}^2 - x^2 - 2xt - t^2 - \dot{x}t^2 \tag{2.6.2}$$

A keverten t-t és x-et tartalmazó tagokkal van probléma, őket szeretnénk eltűntetni. Ilyenkor az ember próbálkozik pár függvénnyel, amíg nem talál valamit, ami közelebb viszi a jó megoldáshoz. Legyen az első tippünk

$$F(x, t) = \frac{1}{3}t^3 \tag{2.6.3}$$

Ezt lederiválva és hozzáadva a Lagrange-hoz eltűnik a t^3 tag. Második próbálkozásunk pedig legyen

$$G(x, t) = xt^2 \quad \longrightarrow \quad \dot{G} = \dot{x}t^2 + 2tx \tag{2.6.4}$$

amivel már boldogak lehetünk: ezt a két teljes deriváltat hozzáadva eltűntek az expliciten időfüggő tagok a Lagrange-ból. Ami maradt:

$$\mathcal{L}' = \dot{x}^2 - x^2 \tag{2.6.5}$$

már megoldható az energiamegmaradást használva.

Itt nem feltétlen egyértelmű hogy egy klasszikus mechanikai feladatról van szó, ezért a $K + V$ helyett használjuk az általánosabb képletet:

$$E = \dot{x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \mathcal{L} = 2\dot{x}^2 - \left(\dot{x}^2 - x^2\right) = \dot{x}^2 + x^2 \tag{2.6.6}$$

Ami egy megmaradó mennyiség. Vegyük fel a nullpontját úgy, hogy $E = 1$ teljesüljön. Ekkor a megoldandó differenciálegyenletünk

$$\dot{x}^2 = 1 - x^2 \tag{2.6.7}$$

$$\dot{x} = \sqrt{1 - x^2} \tag{2.6.8}$$

Ez egy szeparálható diffegyenlet:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1-x^2} \tag{2.6.9}$$

$$\mathrm{d}x = \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}t \tag{2.6.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{d}t \tag{2.6.11}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \mathrm{d}t \tag{2.6.12}$$

$$\arcsin x = t + c \tag{2.6.13}$$

$$x = \sin(t+c) \tag{2.6.14}$$

Méghozzá a harmonikus mozgásé.