3. óra

Ciklikus koordináták

A mai órán további megmaradó mennyiségekkel foglalkozunk: ezeknek első példája a **ciklikus koordinátákra** vezethető vissza. Velük már találkoztunk, csak nem nevesítettük őket. Ha a Lagrange alakja

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \mathcal{L}(x, \dot{x}, \dot{y}) = K(x, \dot{x}, \dot{y}) - V(x)$$

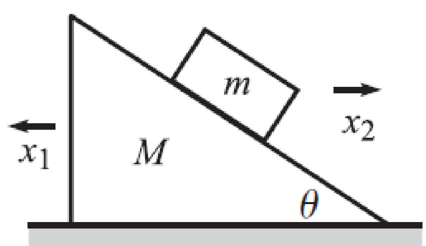
tehát az egyik koordinátát nem tartalmazza expliciten, akkor az a koordináta ciklikus. Ekkor a rá vonatkozó Euler-Lagrange egyenlet alapján

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$$

a hozzá tartozó $p_y = \partial_{\dot{y}}\mathcal{L}$ által definiált **általános lendület** időderiváltja nulla: ő egy megmaradó, lendület-szerű mennyiség.

3.1. példa: Csúszó ék - Tömegközéppont

Térjünk vissza ismét a csúszkáló alakzatokhoz, és használjuk ezt a példát egy általános trükk megismerésére. Ha nincsenek külső erők akkor a tömegközéppont gyorsulása nulla. Ebben a példában csak y irányban hat külső erő (a gravitáció): jó ötlet lehet ezért az x irányban megnézni egy tömegközéppont-szerű mennyiséget.



1. ábra. Csúszó ék ábrája.

Legyenek az x_1 és x_2 helyett az új koordinátáink (emlékezve hogy a két x koordinátát ellenkező előjellel vettük fel)

$$R = \frac{Mx_1 - mx_2}{M + m} \qquad \text{és} \qquad r = x_1 + x_2 \tag{3.1.1}$$

Térjünk át ezekre a koordinátákra, és vegyük figyelembe velük a kényszereket. Visszaidézve a kényszermentes Lagrange-ot:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}M\dot{y_1}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x_2}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y_2}^2 + mgy_2 \tag{3.1.2}$$

A kényszereink most $y_1 = $ konst. és $y_2 = r\tan\varphi$ tehát a potenciál egyszerűen

$$V = -mgr\tan\varphi \tag{3.1.3}$$

ami már csak az egyik koordinátától függ.

A kinetikus tagban viszont történhetnek még csúnyaságok. Következő lépésként invertálnunk kell az új koordinátáink definícióját a régikre. Ez favágó módszerrel

$$x_1 = r - x_2 \qquad x_2 = \frac{M}{m}x_1 - \frac{M+m}{m}R \tag{3.1.4}$$
$$x_2 = r - x_1 \qquad x_1 = \frac{m}{M}x_2 + \frac{M+m}{M}R \tag{3.1.5}$$

egyenletrendszerre vezet, amik kicsit alakítva

$$x_1 = \frac{m}{M}(r - x_2) + \frac{M+m}{M}R \qquad x_2 = \frac{M}{m}(r - x_1) - \frac{M+m}{m}R \tag{3.1.6}$$
$$x_1 = \frac{m}{M+m}r + R \qquad x_2 = \frac{M}{M+m}r - R \tag{3.1.7}$$

Egy fokkal haladóbb út az, ha ezt mátrixosan írjuk:

$$\begin{pmatrix} R \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M}{M+m} & -\frac{m}{M+m} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{3.1.8}$$

A fenti mátrixot invertálva (aminek részleteit később gyakoroljuk)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{m}{M+m} \\ -1 & \frac{M}{M+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ r \end{pmatrix} \tag{3.1.9}$$

ugyanezt az eredményt kapjuk.

Minden esetre ezzel ki tudjuk fejezni a kinetikus tagunk x komponenseit. Némi algebra után

$$M\dot{x_1}^2 + m\dot{x_2}^2 = M\left(\frac{m}{M+m}\dot{r} + \dot{R}\right)^2 + m\left(\frac{M}{M+m}\dot{r} - \dot{R}\right)^2 \tag{3.1.10}$$
$$= \frac{m^2M}{(M+m)^2}\dot{r}^2 + M\dot{R}^2 + 2\frac{mM}{M+m}\dot{r}\dot{R} + \frac{mM^2}{(M+m)^2}\dot{r}^2 + m\dot{R}^2 - 2\frac{mM}{M+m}\dot{r}\dot{R} \tag{3.1.11}$$
$$= m\frac{mM}{(M+m)^2}\dot{r}^2 + M\frac{mM}{(M+m)^2}\dot{r}^2 + (M+m)\dot{R}^2 \tag{3.1.12}$$
$$= \frac{mM}{M+m}\dot{r}^2 + (M+m)\dot{R}^2 \tag{3.1.13}$$

Bevezetve a μ *redukált tömeget*

$$\mu = \frac{mM}{M+m} \tag{3.1.14}$$

A teljes Lagrange-függvényünk

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2\tan^2\varphi + mgr\tan\varphi \tag{3.1.15}$$

Ebben már szépen látszik, hogy az R koordináta sehol sem szerepel explicite: tehát a rá vonatkozó Euler-Lagrange egyenlet alapján

$$\ddot{R} = 0 \tag{3.1.16}$$
$$M\ddot{x}_1 - m\ddot{x}_2 = 0 \tag{3.1.17}$$
$$M\dot{x}_1 - m\dot{x}_2 = \text{konst.} \tag{3.1.18}$$

Tehát a tömegközéppont mozgásának x komponense az, ami itt egy ciklikus koordináta. A hozzá tartozó lendület nem más, mint az x irányú összlendület: ez egy megmaradó mennyiség. Mellesleg a másik, relatív koordinátára vonatkozó Euler-Lagrange eredménye

$$(\mu + m\tan^2\varphi)\ddot{r} = mg\tan\varphi \tag{3.1.19}$$

visszaadja a múlt órán látott mozgásegyenletet. Eszerint a két test állandó

$$\ddot{r} = \frac{mg\tan\varphi}{\mu + m\tan^2\varphi} \tag{3.1.20}$$

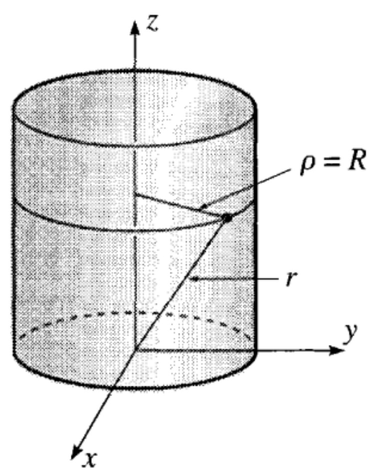
gyorsulással távolodik egymástól az x irányban. A múlt heti eredményeinket összeadva pontosan ezt a gyorsulást kapjuk, jópár algebrai lépés után amit most megspórolunk azzal, hogy elhisszük.

3.2. példa: Mozgás hengeren

Bár kétségtelenül ők a leggyakoribbak, nem csak Descartes-i és gömbi koordináták léteznek. Nézzünk most egy példát, ahol hengeres (ρ, φ, z) koordinátázás lesz célravezető. Vegyünk egy R sugarú, végtelenül magas hengert. Erre rögzítünk egy tömegpontot úgy, hogy csak a henger felületén mozoghat; majd bekapcsolunk egy erőt, ami az origó felé vonzza a tömegpontot, méghozzá

$$\vec{F} = -k\vec{r} \tag{3.2.1}$$

alakban. *Mi lesz a pálya, ha elindítjuk a tömegpontot?*



2. ábra. Henger felületére korlátolt pont koordinátázása.

Először is: kellenek az energiák. A potenciál helyett itt most az erő van megadva, de ha még emlékszünk, hogy

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \tag{3.2.2}$$

akkor visszakövetkeztethetünk rá, mint

$$U = \frac{1}{2}k\vec{r}^2 = \frac{1}{2}kr^2 \tag{3.2.3}$$

Itt r a távolság az origótól: ő még nem hengeres. Kis Pitagorasz tétellel viszont

$$r^2 = z^2 + \rho^2 \tag{3.2.4}$$

tehát a potenciális tag hengerkoordinátákban:

$$U = \frac{1}{2}k(z^2 + \rho^2) \tag{3.2.5}$$

Ahova még beírhatjuk a $\rho = R$ kényszerünket:

$$U = \frac{1}{2}k(z^2 + R^2) \tag{3.2.6}$$

Kérdés még a kinetikus tag: milyen irányokban lehet sebessége a részecskének? A három hengeres irány közül csak ρ nem játszhat, mert a felületre vagyunk korlátozva, így marad z és φ. Hogy az utóbbiból sebességet csináljunk, meg kell javítani a dimenzióját egy hossz mértékegységű sugár szorzóval, ami itt $\rho = R$.

$$K = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 \tag{3.2.7}$$

A teljes Lagrange tehát:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}k(z^2 + R^2) \tag{3.2.8}$$

Ami két változótól függ: z és φ. Mostmár felfegyverkezve viszont a ciklikus koordináták ismeretével, rögtön láthatjuk, hogy nincs explicit φ függés benne, tehát

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \tag{3.2.9}$$

amiből következik, hogy

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi} = \text{konst.} \tag{3.2.10}$$

Ez egy megmaradó mennyiség, mint az előző példában az impulzus volt. Ahogy itt most φ egy *általános* koordináta, a hozzá tartozó $mR^2\dot{\varphi}$ mennyiség egy *általános* impulzus. Mivel ez a koordináta ciklikus (nincs explicit a Lagrange-ban), a hozzá tartozó általános impulzus megmarad. Kis átalakítással egyébként

$$\tilde{p}_\varphi = R \cdot mR\dot{\varphi} = R \cdot mv_\perp = R \cdot p_\perp = L \tag{3.2.11}$$

ez nem más mint a **perdület**.

Minden esetre, már az Euler-Lagrange felírása nélkül tudunk valamit a pályáról: a körkörös komponense a mozgásnak csupán egy állandó sebességű keringés lesz. Marad még a z komponens, amire már kell az Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -kz \qquad\qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \tag{3.2.12}$$

$$m\ddot{z} = -kz \tag{3.2.13}$$

$$\ddot{z} = -\frac{k}{m}z = -\omega^2 z \tag{3.2.14}$$

Ez szintén egy ismerős diffegyenlet lehet: a harmonikus oszcillátoré. Megoldása:

$$z(t) = A\cos(\omega t + c) \tag{3.2.15}$$

Összesítve a találtakat: a részecskénk körkörösen egyenletes sebességgel fog keringeni, míg a z irányban fel-le oszcillál.

Noether-tétel

Megbarátkoztunk kicsit az általános impulzusokkal. Ezeket gyakran tudtuk összekötni egy vizuális megfigyeléssel a problémánkról: az x tengelyen eltolható rendszereknél mindig megmarad az x irányú lendület, a forgásszimmetrikus feladatokban pedig a perdület. Ezt a megfigyelést formalizálja, és általánosítja a Noether-tétel:

A Lagrange-függvény minden szimmetriájához tartozik egy megmaradó mennyiség.

Matematikailag ez azt jelenti, hogy a q változóinkat eltranszformáljuk valahogy (pl. elforgatjuk)

$$\vec{q} \longrightarrow T(\vec{q}) \approx \vec{q} + \epsilon\,\vec{\varphi}$$

ami sorbafejthető az identitás transzformáció (ie.: nem csinálunk semmit, $\vec{q} \to \vec{q}$) körül. Ha erre a transzformációra változatlan a Lagrange függvényünk, akkor

$$P = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{q}}}\vec{\varphi} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\varphi_i = \vec{p}\vec{\varphi}$$

állandó. Nézzünk erre pár példát!

3.3. példa: 2D rugó

3.3.1. Descartes

Vegyünk egy egyszerű rugós testet egy síkban, és írjuk fel a Lagrange-át sima Descartes-i koordinátákban. Ahogy az előbb láthattuk, a rugó potenciális energiája $\frac{1}{2}k\vec{r}^2$, tehát

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) \tag{3.3.1}$$

Nézzük meg az

$$x \to x + \epsilon\, y \qquad\qquad y \to y - \epsilon\, x \tag{3.3.2}$$

transzformációt, tehát ha $\vec{\varphi} = (y, -x)$! Ez mellesleg úgy is írható, mint

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ -\epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.3.3}$$

Ezt nézegetve kicsit, felismerhetjük hogy $\sin\epsilon \approx \epsilon$ és $\cos\epsilon \approx 1$, tehát ő nem más mint egy forgásmátrix közelítése.

Nézzük meg, hogy invariáns-e erre a transzformációra a Lagrange, kezdve a kinetikus taggal. Véve a deriváltakat:

$$\dot{x} \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x + \epsilon\, y) = \dot{x} + \epsilon\dot{y} \qquad\qquad \dot{y} \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y - \epsilon\, x) = \dot{y} - \epsilon\dot{x} \tag{3.3.4}$$

amik négyzetei:

$$\dot{x}^2 \to \dot{x}^2 + 2\epsilon\dot{x}\dot{y} + \underbrace{\epsilon^2\dot{y}^2}_{\approx 0} \qquad\qquad \dot{y}^2 \to \dot{y}^2 - 2\epsilon\dot{x}\dot{y} + \underbrace{\epsilon^2\dot{x}^2}_{\approx 0} \tag{3.3.5}$$

Tehát a kinetikus tag:

$$K \to \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \underbrace{2\epsilon\dot{x}\dot{y} - 2\epsilon\dot{x}\dot{y}}_{=0}) = K \tag{3.3.6}$$

változatlan. Ugyanezt eljátszva a potenciális taggal:

$$V \to \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + +\underbrace{2\epsilon xy - 2\epsilon xy}_{=0}) = V \tag{3.3.7}$$

az is ugyanúgy néz ki, tehát ez egy **szimmetria**.

Ha már tujduk, hogy szimmetriáról beszélünk, nézzük meg mi marad meg a Noether-tétel szerint. Deriválva a Lagrange-ot a sebességek szerint megkapjuk az általános lendületeket:

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad\qquad p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \tag{3.3.8}$$

amiket be kell szorozni még az infinitezimális φ tagokkal:

$$P = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\varphi_x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\varphi_y \tag{3.3.9}$$

$$= m\dot{x} \cdot y - m\dot{y}x \tag{3.3.10}$$

$$= p_x y - p_y x \tag{3.3.11}$$

Ami nem más, mint a rendszer perdülete.

3.3.2. Polár

Írjuk most fel ugyanezt, csak polárkoordinátákban, a rugó végéből a testhez mutató ϑ szöggel és a rugó relatív megnyúlását leíró R távolsággal. Ekkor a Lagrange

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{R}^2 + R^2\dot{\vartheta}^2) - \frac{1}{2}kR^2 \tag{3.3.12}$$

Láthatjuk, hogy ϑ ciklikus, tehát az általános p_ϑ lendület megmarad, amiről már beláttuk korábban, hogy a perdület. Ez konzisztens az előző feladatrésszel, de gyakorlásképp nézzük meg mi lesz most az eltolás amire invariáns a Lagrange. A valóságban úgyis ez a nehezebb része a feladatoknak.

A változók transzformálása nem függ azok deriváltjaitól, ezért általában először a potenciális energiát érdemes nézegetni. Itt most ez teljesen független ϑ-tól, tehát ott tetszőleges

$$\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{azaz} \qquad R \to R + 0, \qquad \vartheta \to \vartheta + \epsilon\alpha \tag{3.3.13}$$

transzformációk működnek. A kinetikus tagunkban viszont szerepel $\dot{\vartheta}$: hogy az változatlan maradjon, igaznak kell lennie

$$\dot{R}^2 + R^2\dot{\vartheta}^2 = \dot{R}^2 + \dot{R}^2(\dot{\vartheta} + \epsilon\dot{\alpha})^2 \tag{3.3.14}$$

összefüggésnek. Ezt kicsit kibontva:

$$\dot{R}^2 + R^2\dot{\vartheta}^2 = \dot{R}^2 + \dot{R}^2(\dot{\vartheta}^2 + 2\epsilon\dot{\vartheta}\dot{\alpha}) \tag{3.3.15}$$

$$\dot{\vartheta}\dot{\alpha} = 0 \tag{3.3.16}$$

$$\dot{\alpha} = 0 \tag{3.3.17}$$

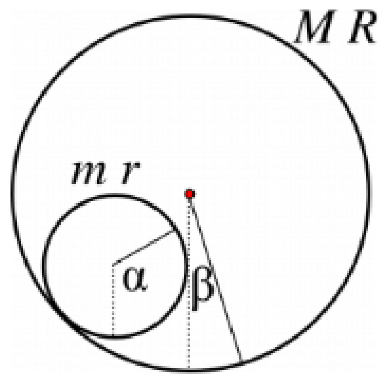
azt látjuk, hogy a szög transzformációja nem más, mint egy konstans eltolás. A hozzá tartozó megmaradó mennyiség pedig:

$$P = mR^2\dot{\vartheta} \cdot \alpha \tag{3.3.18}$$

ismét a perdület, egy konstans α szorzó erejéig. Ezt bele lehet olvasztani az ϵ-ba, és vehető egynek.

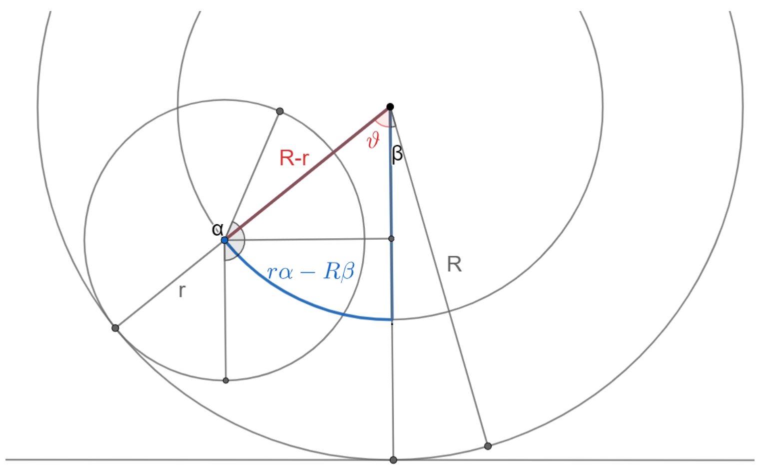
3.4. példa: Hengerben henger

Vegyünk egy M tömegű, R sugarú üres hengert. Rakjunk bele egy másik, m tömegű r sugarú hengert. A nagyot kezdjük el megforgatni valamilyen $\dot{\beta}$ sebességgel, a kicsit pedig hagyjuk csúszni: mi lesz ekkor a Lagrange, mik a szimmetriái és a megmaradó mennyiségei?



3. ábra. Forgó hengerbben guruló henger.

Nézzük meg először a feladat nehezét: a paraméterezést. Hol van a kis henger középpontja tetszőleges időpontban? Ehhez két dolgot kell tudnunk: a csúszásmentes mozgás feltételét, és egy kis geometriát. Utóbbihoz segít a 4. ábra.



4. ábra. Paraméterezést segítő ábra a hengerekről.

Ha csúszás nélkül történne a mozgás, akkor az érintkzési pontokban megegyeznének a kerületi sebességek, tehát

$$r\dot{\alpha}_0 = R\dot{\beta}_0 \tag{3.4.1}$$

És mivel nem lenne csúszás, a kis henger középpontja ott is maradna, ahol volt. Ha ez a feltétel viszont **nem** teljesül, akkor el fog mozdulni a kör körül, valamilyen $r\dot{\alpha} - R\dot{\beta}$ sebességgel. Ez alatt megtesz a kis henger középpontja valamennyi Δl utat a nagy középpontja körül, méghozzá

$$\Delta l = r\alpha - R\beta \tag{3.4.2}$$

Tehát kis geometriával tetszőleges (α, β) változóknál a kis henger középpontjához kellő szög:

$$\vartheta = \frac{r\alpha - R\beta}{R-r} \tag{3.4.3}$$

Ezzel a kis kör középpontjának (x_m, y_m) koordinátái:

$$x_m = (R-r)\sin\frac{r\alpha - R\beta}{R-r} \qquad y_m = (R-r)\cos\frac{r\alpha - R\beta}{R-r} \tag{3.4.4}$$

Az utóbbival gyorsan fel is tudjuk írni a potenciális energiát, mint

$$V = -mg(R-r)\cos\frac{r\alpha - R\beta}{R-r} \tag{3.4.5}$$

A kis henger kinetikus energiájához nem elég tudni a középpontját: a kerületén lévő pontok szép gyorsan keringhetnek, szóval nekik is lesz kinetikus energiájuk. Egy tetszőleges pontja a kis körnek:

$$x = x_m + r\sin\alpha \qquad y = y_m - r\cos\alpha \tag{3.4.6}$$

$$x = (R-r)\sin\frac{r\alpha - R\beta}{R-r} + r\sin\alpha \qquad y = (R-r)\cos\frac{r\alpha - R\beta}{R-r} - r\cos\alpha \tag{3.4.7}$$

Ezeket deriválva:

$$\dot{x} = \cos\frac{r\alpha - R\beta}{R-r}(r\dot{\alpha} - R\dot{\beta}) + r\dot{\alpha}\cos\alpha \qquad \dot{y} = -\sin\frac{r\alpha - R\beta}{R-r}(r\dot{\alpha} - R\dot{\beta}) + r\dot{\alpha}\sin\alpha \tag{3.4.8}$$

Amiből a kinetikus tagba szükséges négyzetösszegük:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2\dot{\alpha}^2 + (r\dot{\alpha} - R\dot{\beta})^2 \tag{3.4.9}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2r^2\dot{\alpha}^2 + R^2\dot{\beta}^2 - 2rR\dot{\alpha}\dot{\beta} \tag{3.4.10}$$

Tehát a kis henger kinetikus tagja:

$$K_m = mr^2\dot{\alpha}^2 - mrR\dot{\alpha}\dot{\beta} + \frac{1}{2}mR^2\dot{\beta}^2 \tag{3.4.11}$$

A nagy henger már egyszerűbb: az csak forog a tengelye körül, így

$$K_M = \frac{1}{2}MR^2\dot{\beta}^2 \tag{3.4.12}$$

Tehát a teljes Lagrange:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\beta}^2 + mr^2\dot{\alpha}^2 - mrR\dot{\alpha}\dot{\beta} + \frac{1}{2}mR^2 + mg(R-r)\cos\frac{r\alpha - R\beta}{R-r} \tag{3.4.13}$$

Keressünk ebben valamilyen szimmetriát! Induljunk mi megint a potenciális energiából, azon belül is a cos tagból. Kis alakítással:

$$\cos\frac{r\alpha - R\beta}{R-r} = \cos\left(r\frac{\alpha - \frac{R}{r}\beta}{R-r}\right) \tag{3.4.14}$$

Ez alapján tippeljük be a:

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} + \epsilon\begin{pmatrix}1\\ \frac{r}{R}\end{pmatrix} \tag{3.4.15}$$

alakú konstans transzformációt. Ezt nézegetve láthatjuk, hogy az α szöget, tehát a belső hengert elforgatjuk valamilyen ϵ szöggel; míg a külsőt a $\frac{r}{R}\epsilon$-al. Visszaidézve a csúszásmentes forgás feltételét, azt ez pont teljesíti.

Nézzük meg mi lesz a hozzá tartozó megmaradó mennyiség is. Véve az általános lendületeket:

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\alpha} = r^2 m\dot\alpha - mrR\dot\beta \tag{3.4.16}$$

$$p_\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\beta} = R^2 M\dot\beta - mrR\dot\alpha \tag{3.4.17}$$

Majd megszorozva az infinitezimális trafókkal:

$$P = (r^2 m\dot\alpha - mrR\dot\beta) + (R^2 M\dot\beta - mrR\dot\alpha)\frac{r}{R} \tag{3.4.18}$$

$$= (r^2 m\dot\alpha - mrR\dot\beta + RrM\dot\beta - mr^2\dot\alpha) \tag{3.4.19}$$

$$= (M - m)rR\dot\beta \tag{3.4.20}$$

lesz a megmaradó mennyiségünk.

Közelítések

Gyakran előfordul, hogy a mozgásegyenletek amiket megkapunk nem oldhatók meg kézzel, vagy legalábbis nem könnyen. Ilyenkor nagyjából három lehetőség van:

- Numerikusan oldjuk meg őket, például `python`-ban a `scipy` csomaggal.
- Megnézzük a rendszer egyensúlyi pontjait, és azokról próbálunk meg valami okosat mondani.
- Addig közelítünk, amíg meg nem tudjuk oldani kézzel.

Most az utolsó ponttal fogunk foglalkozni. A közelítéseknek első lépése, hogy feltesszük egy változóról hogy pici, például $\varphi \ll 1$. Ekkor φ összes függvényét ami megjelenik a problémánkban Taylor-sorba tudjuk fejteni a nulla körül tetszőleges rendig, ami gyakran már kezelhetőbb.

Emlékeztetőül tetszőleges $f(x)$ függvénynek az a pont körüli Taylor sora:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

például

$$\sin x \approx \sin 0 + \frac{\cos 0}{1!}(x-0) + \frac{-\sin 0}{2!}(x-0)^2 + \cdots = x + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\ln{(1+x)^2} \approx \ln{(1+0)^2} + \frac{\frac{2(1+0)}{(1+0)^2}}{1!}(x-0) + \cdots = 2x + \mathcal{O}(2)$$

Őt hasznos gyakorolni, ha eddig lemaradt volna: az elemi függvények sorfejtését könnyű megkeresni, de az összetettekét már gyakran manuálisan kell kiszámolnunk.

3.5. példa: Inga

Bemelegítésként először írjuk fel a sima inga problémáját Lagrange-osan, polárkoordinátákkal. A kényszermentes Lagrange-függvény két tagja, ha origónak a felfüggesztési pontot vesszük:

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \tag{3.5.1}$$

$$V = mg(l-y) = -mgy + V_0 \tag{3.5.2}$$

Ebbe jön majd a kényszerünk, miszerint $x^2 + y^2 = l^2$. Áttérve polárkoordinátákra

$$x = l\sin\varphi \qquad \text{és} \qquad y = l\cos\varphi \tag{3.5.3}$$

ez automatikusan teljesül, és a Lagrange-unk alakja

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi \tag{3.5.4}$$

A szükséges deriváltak

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = -mgl\sin\varphi \tag{3.5.5}$$

illetve

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\ddot{\varphi} \tag{3.5.6}$$

Amikből adódik a mozgásegyenlet:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi \tag{3.5.7}$$

ami már ismerős lehet az előző óráról. Emlékeztetőül ott bevezettük $\omega = \sqrt{g/l}$-et, aztán **kis szögekre** közelítettünk mint $\varphi \ll 1$, amelynek eredményeképp

$$\ddot{\varphi} \approx -\omega^2\varphi \tag{3.5.8}$$

egy harmonikus oszcillátort kapunk. Innen ered a közelítő eredmény az inga keringési idejére:

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3.5.9}$$

Ez mind szép és jó, viszont a közelítést már a mozgásegyenlet utolsó alakjában alkalmaztuk. Ez a precízebb és biztosabb mód: mégis kíváncsiak lehetünk, hogy lehet-e előbb. A válasz az, hogy igen, ha óvatosak vagyunk.

Kezdjük rögtön a Lagrange-al:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 \cdot 1 + mgl \cdot \cos\varphi \tag{3.5.10}$$

És közelítsünk a potenciális energiában **másodrendig**:

$$\mathcal{L} \approx \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 \cdot 1 + mgl \cdot \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \tag{3.5.11}$$

Két tagot kaptunk: az első egy konstans, ami nem befolyásolja a fizikát, ezért lehagyható. A többi:

$$\mathcal{L} \approx \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 \cdot 1 - \frac{1}{2}mgl \cdot \varphi^2 \tag{3.5.12}$$

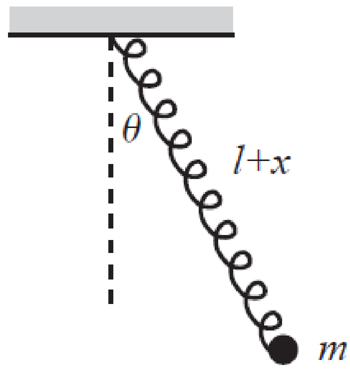
Ebből kiszámolva a mozgásegyenletet, az eredmény

$$\ddot{\varphi} \approx -\omega^2\varphi \tag{3.5.13}$$

pont ugyanaz, amit az előbb kaptunk.

3.6. példa: Rugós inga

Cseréljük le az előző feladat ingájának madzagát egy rugóra: *mi lesz ekkor a mozgásegyenlet kis kitérésekre?*



5. ábra. Rugós inga rajza. Itt x helyett R-el fogom jelölni a megnyúlását, az eredeti hosszát pedig l_0-al.

3.6.1. Általános megoldás

Ha belevesszük a rugót is:

$$V_{\text{rugó}} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 \tag{3.6.1}$$

ahol Δl fejezi ki, hogy mennyire nyúlt meg a rugó az eredeti l_0-hoz képest. Descartes-i koordinátákkal:

$$x^2 + y^2 = l^2 = (l_0 + \Delta l)^2 \tag{3.6.2}$$

$$\Delta l = \sqrt{x^2 + y^2} - l_0 \tag{3.6.3}$$

Hogy kiválasszuk a jó koordinátákat, gondolkodjunk kicsit a feladaton. Két dolgunk van: ingánk és rugónk. Az inga láttuk milyen jól illeszkedik a poláros koordinátázáshoz. A rugóban pedig az jelenik meg, hogy mennyit nyúl meg sugárirányban. Legyen a két változónk φ, az inga kitérési szöge, és R, az inga megnyúlása az eredeti l_0 hosszához képest. A régi változók nyelvén tehát:

$$x^2 + y^2 = l^2 = (l_0 + R)^2 \tag{3.6.4}$$

$$x = l\sin\varphi = (l_0 + R)\sin\varphi \tag{3.6.5}$$

$$y = l\cos\varphi = (l_0 + R)\cos\varphi \tag{3.6.6}$$

Milyen sebességek jelennek meg a kinetikus tagban? Lesz egyrészt a sugárirányú sebesség, ami azt mondja meg, hogy mennyire változik éppen R:

$$K_r = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 \tag{3.6.7}$$

és lesz egy erre merőleges komponens, ami az érintő irányú sebesség lesz. Ez pedig a $\dot{\varphi}$ szögsebesség szorozva az $(l_0 + R)$ sugárral, tehát

$$K_\varphi = \frac{1}{2}m(l_0 + R)^2\dot{\varphi}^2 \tag{3.6.8}$$

Ezeket összeadva pont ugyanazt kapjuk, mint amit a biztosabb behelyettesítéses módszerrel kaptunk volna.

A rugó potenciális energiája így már nagyon egyszerű:

$$V_{\text{rugó}} = \frac{1}{2}kR^2 \tag{3.6.9}$$

Cserébe a gravitációs potenciális energiánk lesz picit csúnyább:

$$V_{\text{grav.}} = mg(l_0 + R)(1 - \cos\varphi) \tag{3.6.10}$$

Ezzel kész is a Lagrange-unk:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 + \frac{1}{2}m(l_0 + R)^2\dot{\varphi}^2 + mg(l_0 + R)(\cos\varphi - 1) - \frac{1}{2}kR^2 \tag{3.6.11}$$

és jöhetnek is az Euler-Lagrange egyenletek. Két változónk van, tehát kettő lesz:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R} = m(l_0 + R)\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi - mg - kR \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{R}} = m\dot{R} \tag{3.6.12}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = -mg(l_0 + R)\sin\varphi \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = m(l_0 + R)^2\dot{\varphi} \tag{3.6.13}$$

Amikkel elvégezve a deriválásokat:

$$(l_0 + R)\dot{\varphi}^2 + g\cos\varphi - g - \frac{k}{m}R = \ddot{R} \tag{3.6.14}$$

$$-g(l_0 + R)\sin\varphi = 2(l_0 + R)\dot{R}\dot{\varphi} + (l_0 + R)^2\ddot{\varphi} \tag{3.6.15}$$

Kicsit még szépítve:

$$\ddot{R} = (l_0 + R)\dot{\varphi}^2 + g(\cos\varphi - 1) - \frac{k}{m}R \tag{3.6.16}$$

$$(l_0 + R)\ddot{\varphi} = -2\dot{R}\dot{\varphi} - g\sin\varphi \tag{3.6.17}$$

Ezt már be lehet küldeni a kedvenc numerikus megoldónknak, és meg is lesznek a pályák.

3.6.2. Közelítés

Arra vagyunk kíváncsiak, hogy kis kitérésekre mi lesz a megoldás. Ez itt két dolgot jelent: a szög is kicsit tér ki az egyensúlyi helyzetéből, és a rugó is. Tehát

$$\varphi \ll 1 \qquad \text{és} \qquad R \ll l_0 \tag{3.6.18}$$

Ha még nem megy magabiztosan a közelítés, akkor csináljuk a következőt: legyen

$$\varphi = \varepsilon\varphi_0 \qquad \text{és} \qquad R = \varepsilon R_0 \tag{3.6.19}$$

ami dimenziósan korrekt. Ezt beírva a mozgásegyenleteinkbe, illetve a szögfüggvényeket Taylor-sorba fejtve:

$$\varepsilon\ddot{R}_0 = (l_0 + \varepsilon R_0)\varepsilon^2{\dot{\varphi}_0}^2 + g - g - \frac{k}{m}\varepsilon R_0 \tag{3.6.20}$$

$$(l_0 + \varepsilon R_0)\varepsilon\ddot{\varphi}_0 = -2\varepsilon^2\dot{R}_0\dot{\varphi}_0 - g\varepsilon\varphi_0 \tag{3.6.21}$$

Ki tudjuk kukázni az ϵ-ban elsőrenden túlmenő tagokat:

$$\varepsilon \ddot{R}_0 \approx -\frac{k}{m}\varepsilon R_0 \tag{3.6.22}$$

$$(l_0)\varepsilon\ddot{\varphi}_0 \approx -g\varepsilon\varphi_0 \tag{3.6.23}$$

Tehát

$$\ddot{R}_0 \approx -\frac{k}{m}R_0 \tag{3.6.24}$$

$$\ddot{\varphi}_0 \approx -\frac{g}{l_0}\varphi_0 \tag{3.6.25}$$

első rendben a megoldásaink szeparálódnak két független harmonikus oszcillátorra: az egyik frekvenciája a szokásos rugóé, a másiké pedig az ingáé.

Ha rögtön a Lagrange-ban közelítenénk, akkor az már bonyolultabb egy csatolt rendszer esetén. A potenciális energiában ugyanúgy lehet másodrendben közelíteni:

$$V_{\text{grav.}} = mg(l_0+R)(1-\cos\varphi) \approx mg(l_0+R)\left(1-1+\frac{\varphi^2}{2}\right) \tag{3.6.26}$$

$$\approx \frac{1}{2}mgl_0\varphi^2 \tag{3.6.27}$$

A kinetikus tagban figyelnünk kell, hogy összességében a koordináták és a sebességek rendje is egyezzen ezzel. Van például az a tagunk, hogy

$$\frac{1}{2}m(l_0+R)^2\dot{\varphi}^2 \tag{3.6.28}$$

ami összességében másodrendű kell, hogy legyen. Mivel $\dot{\varphi}^2$ rendjét nem tudjuk csökkenteni, ezért a másik tag csak nulladik rendig számít. Ergo $\frac{1}{2}ml_0^2\dot{\varphi}^2$ lesz. Az összesített közelítő Lagrange-unk tehát

$$\mathcal{L} \approx \frac{1}{2}m\dot{R}^2 + \frac{1}{2}ml_0\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}mgl_0\varphi^2 - \frac{1}{2}kR^2 \tag{3.6.29}$$

nem más, mint két egymással nem kommunikáló oszcillátor, ahogy fentebb is beláttuk.

Kis megjegyzés a beadandóhoz és a további feladatokhoz: ha például egy olyan kinetikus tagunk van, hogy

$$K \propto \left(\dot{x_1}\cos x_1 + \dot{x_2}\sin x_2 + \dot{x_1}\frac{\ln(x_2)}{x_2}\right)^2$$

akkor is figyelni kell a sorfejtés rendjére. Itt például ha minden koordinátának a függvényét elsőrendig fejtjük (nulla körül $\cos x \approx 1$, $\sin x \approx x$, $\ln(1+x) \approx x$) akkor

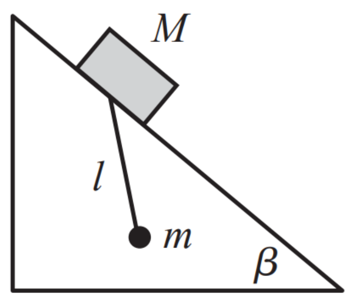
$$K \approx (\dot{x_1} + \dot{x_2}x_2 + \dot{x_1})^2$$

és látszik, hogy egyetlen olyan tagunk lesz csak, ami összességében másodrendű:

$$K \approx 4\dot{x_1}^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

3.7. példa: Éken csúszó inga

Múlt héten említettem, hogy a Lagrange-i mechanika feladatok olyanok mint a LEGO: csak össze kell rakni az őket felépítő blokkokat, aztán szisztematikusan megy a megoldás. Most nézzük meg ezt pár eddigi példa darabjaiból. Vegyünk egy asztalhoz rögzített háromszög alakú éket, amire rakjunk egy M tömegű téglatestet, ami rajta szabadon, súrlódásmentesen mozoghat. Rakjunk erre a téglatestre egy l hosszúságú ingát, egy m tömegű testtel a végén. *Mi lesz az inga mozgásegyenlete?*



6. ábra. Éken csúszó testhez rögzített inga.

Keressük meg a jó változókat! Ezek tipikusan olyanok, amik automatikusan teljesítik a kényszereket a Lagrange-ban: például azt, hogy a téglatest az éllel párhuzamosan mozog. Legyen ennek a koordinátája z. Az inga pedig adja magát egy φ szöghöz, amit a felfüggesztésétől nézünk. A kinetikus energia ekkor:

$$K = \frac{1}{2}M\dot{z}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + K_{m,k} \tag{3.7.1}$$

Ahol $K_{m,k}$ az ingán lógó test kinetikus tagja a lecsúszásból adódóan. Mielőtt őt kiszámítjuk, nézzük meg a potenciális energiát. Az sajnos már nem illeszkedik olyan szépen a koordinátákhoz: a két test magassága kell hozzá. Ez a téglatestre

$$\frac{y}{z} = \sin\beta \qquad \text{tehát} \qquad y = z\sin\beta \tag{3.7.2}$$

Az ingán lógó test pedig még ez alatt fog lógni, hozzá képest egy extra $l\cos\varphi$ távolságot. Ezzel a potenciális energia

$$V = -Mgz\sin\beta - mg\left(z\sin\beta + l\cos\varphi\right) \tag{3.7.3}$$

A hiányzó kinetikus tagunkhoz fel tudjuk használni az itt kifejezett y_m távolságot, és a hasonló x irányú eltérülését is az ingának:

$$x_m = z\cos\beta + l\sin\varphi \tag{3.7.4}$$

$$\dot{x_m} = \dot{z}\cos\beta + l\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{3.7.5}$$

Hasonlóképpen az y_m tagra:

$$\dot{y_m} = -\dot{z}\sin\beta + l\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{3.7.6}$$

A kettő négyzetösszege pedig:

$$\dot{x_m}^2 + \dot{y_m}^2 = \dot{z}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{z}(\cos\beta\cos\varphi - \sin\beta\sin\varphi) \tag{3.7.7}$$

Ahol megtaláljuk a már betippelt tagokat, illetve azt ami hiányzott:

$$K_{m,k} = 2l\dot{\varphi}\dot{z}(\cos\beta\cos\varphi - \sin\beta\sin\varphi) = 2l\dot{\varphi}\dot{z}\cos(\varphi+\beta) \tag{3.7.8}$$

Ezzel együtt tehát a teljes Lagrange:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{z}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + ml\dot{\varphi}\dot{z}\cos(\varphi+\beta) + Mgz\sin\beta + mg(z\sin\beta + l\cos\varphi) \tag{3.7.9}$$

A mozgásegyenletek pedig, a téglatesttel kezdve:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} = (M+m)g\sin\beta \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} = M\dot{z} + ml\dot{\varphi}\cos(\varphi+\beta) \tag{3.7.10}$$

$$(M+m)g\sin\beta = M\ddot{z} + ml\ddot{\varphi}\cos(\varphi+\beta) - ml\dot{\varphi}^2\sin(\varphi+\beta) \tag{3.7.11}$$

Az ingára pedig:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = -ml\dot{\varphi}\dot{z}\sin(\varphi+\beta) - mgl\sin\varphi \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} + ml\dot{z}\cos(\varphi+\beta) \tag{3.7.12}$$

$$-ml\dot{\varphi}\dot{z}\sin(\varphi+\beta) - mgl\sin\varphi = ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{z}\cos(\varphi+\beta) - ml\dot{z}\dot{\varphi}\sin(\varphi+\beta) \tag{3.7.13}$$

$$-mgl\sin\varphi = ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{z}\cos(\varphi+\beta) \tag{3.7.14}$$

$$l\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi - \ddot{z}\cos(\varphi+\beta) \tag{3.7.15}$$

Mit kapunk akkor, ha mind φ mind β kicsit? Ekkor

$$(M+m)g\beta = M\ddot{z} + ml\ddot{\varphi} \tag{3.7.16}$$

$$l\ddot{\varphi} = -g\varphi - \ddot{z} \tag{3.7.17}$$

kis rendezéssel

$$(M+m)g\beta = -Ml\ddot{\varphi} - Mg\varphi + ml\ddot{\varphi} \tag{3.7.18}$$

$$(m-M)l\ddot{\varphi} = (M+m)g\beta + Mg\varphi \tag{3.7.19}$$

Csináljunk egy kis változócserét! Legyen

$$u = \varphi + \frac{M+m}{M}\beta \tag{3.7.20}$$

ezt megszorozva Mg-vel:

$$Mgu = Mg\varphi + g(M+m)\beta \tag{3.7.21}$$

ami pont az egyenletünk jobb oldala. A változót deriválva pedig azt tapasztaljuk, hogy $\ddot{u} = \ddot{\varphi}$ tehát azt az egyenletet is megoldhatnánk, hogy

$$(m-M)l\ddot{u} = Mgu \tag{3.7.22}$$

$$\ddot{u} = -\frac{M}{M-m}\frac{g}{l}u \tag{3.7.23}$$

Ez nem más, mint egy harmonikus oszcillátor (megint). Kis szöges közelítésben tehát az inga harmonikusan rezeg, csak egy picit eltolva: függőleges helyett attól $\frac{M+m}{M}\beta$ szöggel eltolva.