4. óra

Kisrezgések, normálmódusok

Bár a mozgásegyenleteket könnyen fel tudjuk írni a Lagrange-i mechanika módszereivel, láthattuk, hogy azokat megoldani már általánosan nem mindig lehet. Van viszont egy nevezetes rendszer amit jól ismerünk és szeretünk: a harmonikus oszcillátor. Ha egy adott rendszert valamilyen közelítésben (*pl. kis szögek*) át tudunk alakítani valami oszcillátor-szerűvé (*rezgések*) akkor vissza tudjuk vezetni a problémát valami jól megoldhatóra.

Emlékeztetőül egy darab egy dimenziós harmonikus oszcillátor Lagrange-függvénye (valamilyen általános q koordinátával):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2$$

amit kicsit másképp is írhatunk:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{q}m\dot{q} - \frac{1}{2}qkq$$

Ha több, akár egymással kölcsönható rugónk is van, akkor is ilyen alakú lesz a megoldás. Viszont több koordináta esetén q helyett $\underline{q}$ vektoraink lesznek, a Lagrange viszont egy skalár mennyiség. Ahhoz hogy skalárt kapjunk vektorokból, a tippelt alak a több rugós Lagrange-ra:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\underline{\dot{q}}^T \underline{\underline{M}}\,\underline{\dot{q}} - \frac{1}{2}\underline{q}^T \underline{\underline{D}}\,\underline{q}$$

tehát sorvektor, mátrix, oszlopvektor alakú tagjaink kell hogy legyenek.

Ennek az alaknak van egy nagy előnye: ismerősen néz ki, és az Euler-Lagrange egyenlet is teljesen hasonló egy harmonikus oszcillátoréra:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underline{\dot{q}}} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\underline{q}}\\ \underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{q}} &= -\underline{\underline{D}}\,\underline{q}\\ \underline{\ddot{q}} &= -\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{D}}\,\underline{q}\\ \underline{\ddot{q}} &= -\underline{\underline{A}}\,\underline{q}\end{aligned}$$

végeredményéül pedig ilyen alakú mozgásegyenletet kapunk. Ha itt nem vektorok lennének, akkor ez egy szögfüggvény diffegyenlete lenne: mivel több dimenzióban vagyunk, jó ötlet az, ha a megoldást szögfüggvények lineárkombinációjaként keressük, valamilyen

$$\underline{q} = \sum_i c_i \underline{\eta}^i \cos(\omega_i t + \delta_i)$$

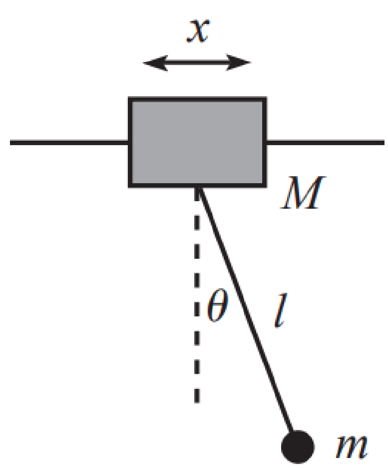
alakban. Az állítás az, hogy ezek az $\underline{\eta}$ vektorok (amikből kikombinálható a tényleges megoldás) sajátvektorai az $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak: őket hívjuk **normálmódusoknak**. A szögfüggvényekben megjelenő ω frekvenciák pedig a hozzájuk tartozó **sajátfrekvenciák**.

Ez így még egész száraznak tűnhet: pár példa után megbarátkozunk vele. A lényeges lépések minden esetre:

- Felírjuk mátrixosan a Lagrange függvényt (akár közelítésekkel).
- Kiszámoljuk az $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{D}}$ mátrixot (ez egy invertálás aztán egy mátrixszorzás).
- Megkeressük a sajátrendszerét, amiből adódnak a megoldásaink.

4.1. példa: Csúszkáló inga

Vegyünk egy M tömegű testet, és rögzítsük egy sínre a gravitációval merőlegesen. Erre akasszunk egy l hosszúságú ingát, rajta egy m tömeggel. *Milyen mozgást végez a rendszer kis kitérések esetén?*



1. ábra. Sínen csúszkáló testhez rögzített inga.

Nézzük meg ezt a példát két féle megoldáson keresztül. Minden esetre a kiindulási pont a Lagrange-lesz, amit írjunk fel az egyensúlyi helyzettől vett eltérésekkel. Ez a példa egyszerű: ránézésre akkor van egyensúlyban a rendszer, ha $x = 0$ és $\vartheta = 0$: ezek már magukban jó általános koordináták. Kiindulásul a Descartes-i Lagrange:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x_m}^2 + \dot{y_m}^2\right) - mgy_m \tag{4.1.1}$$

Amire még ki kell róni a kényszereinket. Egyrészt a test a sínen mozog, tehát $\dot{y} = \text{konst.}$, másrészt pedig az inga hossza fix: ezt már láttuk, a polárkoordináták teljesítik automatikusan.

A kis tömegpont koordinátái

$$\vec{r}_m = \vec{r}_M + \begin{pmatrix} l\sin\varphi \\ -l\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l\sin\varphi \\ -l\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{4.1.2}$$

tehát kis matekkal

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\vartheta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right) + mgl\cos\vartheta \tag{4.1.3}$$

Ebből a Lagrange-ból kell megmondanunk a mozgást. Először nézzünk meg egy speciálisabb utat ami általában nem működik, de ennél a feladatnál egyszerűbb lesz miatta az életünk. Aztán a megoldás tudatában váltsunk át a szisztematikus, mindig működő módszerekre.

4.1.1. Lendületmegmaradás

Vegyük észre, hogy x ciklikus: tehát p_x megmarad. Ezért

$$p_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = M\dot{x} + m\dot{x} + ml\dot{\vartheta}\cos\vartheta = \text{konst.} \tag{4.1.4}$$

Hogyha csak a kis szögekre vagyunk kíváncsiak, akkor első rendben

$$\dot{x}(m+M) + ml\dot{\vartheta} = A' \tag{4.1.5}$$

$$\dot{x} = -\frac{ml}{m+M}\dot{\vartheta} + A \tag{4.1.6}$$

$$\int \dot{x}\mathrm{d}t = -\int \frac{ml}{m+M}\dot{\vartheta}\mathrm{d}t + \int A\mathrm{d}t \tag{4.1.7}$$

$$x(t) = -\frac{ml}{m+M}\vartheta + At + B \tag{4.1.8}$$

Ami marad még, az a másik változó Euler-Lagrange egyenlete:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = -ml\dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta - mgl\sin\vartheta \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = ml^2\dot{\vartheta} + ml\dot{x}\cos\vartheta \tag{4.1.9}$$

$$ml^2\ddot{\vartheta} + ml\ddot{x}\cos\vartheta - ml\dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta = -ml\dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta - mgl\sin\vartheta \tag{4.1.10}$$

Amire alkalmazzuk a is szöges közelítést, és egyszerűsítsünk. A közelítésben most első rendig megyünk el, mert a nem-szögfüggvényeket tartalmazó $ml^2\ddot{\vartheta}$ tag elsőrendű a szögben: a többit is célszerű eddig közelíteni.

$$\ddot{\vartheta} + \frac{1}{l}\ddot{x} = -\frac{g}{l}\vartheta \tag{4.1.11}$$

Ebbe be tudjuk írni $x(t)$-t a lendületmegmaradásból kiszámított időfüggéssel:

$$\ddot{\vartheta} - \frac{m}{m+M}\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l}\vartheta \tag{4.1.12}$$

$$\left(1 - \frac{m}{m+M}\right)\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l}\vartheta \tag{4.1.13}$$

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l}\frac{m+M}{M}\vartheta \tag{4.1.14}$$

Ez egy ismerős differenciálegyenlet: a szögfüggvények második deriváltja pont egy negatív előjellel arányos saját magukkal. Keressük tehát a megoldást

$$\vartheta(t) = C\cos(\omega t + \delta) \tag{4.1.15}$$

alakban. Ezt visszaírva

$$-C\omega^2\cos(\omega t + \delta) = -\frac{g}{l}\frac{m+M}{M}\vartheta \tag{4.1.16}$$

tehát megoldja a tippelt függvényünk a mozgásegyenletet, ha

$$\omega^2 = \frac{g}{l}\frac{m+M}{M} \tag{4.1.17}$$

Összegezve, a megoldásunk a két változóra:

$$\vartheta(t) = C\cos(\omega t + \delta) \tag{4.1.18}$$

$$x(t) = -C\frac{ml}{m+M}\cos(\omega t + \delta) + At + B \tag{4.1.19}$$

Ami azt mutatja, hogy az inga oszcillál, az őt tartó test mozgása pedig egy azonos frekvenciájú oszcillációból és egy x irányú egyenletes mozgásból áll.

4.1.2. Általános megoldás

A fenti megoldás működött, de kihasználta a lendület megmaradását: sajnos ezt nem mindig tudjuk megtenni. Hogy a bonyolultabb feladatok megoldásához szükséges mátrixos írásmódot gyakoroljuk, alkalmazzuk azt is erre a feladatra.

Először is, fel kell írnunk a Lagrange-ot mátrixosan az általános koordinátákkal,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{q}\underline{\underline{M}}\dot{q} - \frac{1}{2}q\underline{\underline{D}}q \tag{4.1.20}$$

alakban. Na ez így még nem fog menni a mi Lagrangunkra, szóval közelítsünk most rögtön a Lagrange-ban. Menjünk el a szögben másodfokig: így a deriválások után elsőfokú tagok lesznek a mozgásegyenletben. Ebben a közelítésben $\cos\vartheta \approx 1 - \frac{\vartheta^2}{2}$, tehát

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\vartheta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\vartheta} - l\dot{x}\underbrace{\dot{\vartheta}\vartheta^2}\right) + \underbrace{mgl} - \frac{1}{2}mgl\vartheta^2 \tag{4.1.21}$$

Itt két tagot is elhagyhatunk: az első aláhúzott már harmadfokú, a második pedig egy konstans. Ez már felírható szépen, mint

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{\vartheta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M+m & ml\\ ml & ml^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{\vartheta}\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\ \vartheta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & mgl\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ \vartheta\end{pmatrix} \tag{4.1.22}$$

Elvégezve a mátrixos alakra a deriválgatást, az Euler-Lagrange

$$\underline{\underline{M}}\ddot{q} = -\underline{\underline{D}}q \tag{4.1.23}$$

$$\ddot{q} = -\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{D}}q \tag{4.1.24}$$

Keressük a $\underline{q}$ megoldását valamilyen tippelt próbafüggvények lineáris kombinációjaként:

$$\underline{q} = \sum_i c_i \underline{\eta}_i \cos\left(\omega_i t + \delta_i\right) \tag{4.1.25}$$

Hogy megtaláljuk ezeket az $\underline{\eta}$ vektorokat és ω frekvenciákat, meg kell oldanunk az $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{D}}$ mátrix sajátproblémáját. Először kell a tömegmátrix inverze, ami két dimenzióban egyszerűbb:

$$\underline{\underline{M}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{M}}}\mathrm{adj}\underline{\underline{M}} \tag{4.1.26}$$

a determinánsból és a (mátrix értelemben vett) adjungált mátrixból tevődik össze. Tehát nekünk

$$\underline{\underline{M}}^{-1} = \frac{1}{m(m+M)l^2 - m^2l^2}\begin{pmatrix}ml^2 & -ml\\ -ml & M+m\end{pmatrix} \tag{4.1.27}$$

$$\underline{\underline{M}}^{-1} = \frac{1}{Mml^2}\begin{pmatrix}ml^2 & -ml\\ -ml & M+m\end{pmatrix} \tag{4.1.28}$$

Marad a mátrixszorzás, ami most relatíve gyorsan megvan:

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{Mml^2}\begin{pmatrix}0 & -m^2l^2g\\ 0 & (M+m)mgl\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -\frac{m}{M}g\\ 0 & \frac{M+m}{M}\frac{g}{l}\end{pmatrix} \tag{4.1.29}$$

Ennek a sajátértékeit jelöljük ω^2-el. A rájuk vonatkozó sajátértékegyenlet pedig a spuros-determinánsos képletből

$$-\omega^2\left(\frac{M+m}{M}\frac{g}{l} - \omega^2\right) = 0 \tag{4.1.30}$$

Ennek két megoldása van: egyrészt lehet $\omega_0 = 0$. Másrészt lehet

$$\omega^2 = \frac{M+m}{M}\frac{g}{l} \tag{4.1.31}$$

Nézzük meg a hozzájuk tartozó sajátvektorokat! Az első esetben

$$\begin{pmatrix} 0-0 & -\frac{m}{M}g \\ 0 & \frac{M+m}{M}\frac{g}{l}-0 \end{pmatrix}\underline{\eta_0} = \mathbf{0} \tag{4.1.32}$$

Ennek normált megoldása:

$$\underline{\eta_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.1.33}$$

Van tehát egy komponensünk, ami az x irányban $\omega_0 = 0$ frekvenciával oszcillál: ez nem egy rezgés, tehát a módszertanunk nem alkalmas a tárgyalására. Egyébként ő az, ami egy egyenletes eltolásként és sebességként jelenik meg a megoldásban.

A másik sajátértékre

$$\begin{pmatrix} -\frac{M+m}{M}\frac{g}{l} & -\frac{m}{M}g \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\underline{\eta} = \mathbf{0} \tag{4.1.34}$$

amit megold

$$\underline{\eta} = \begin{pmatrix} -\frac{ml}{m+M} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.1.35}$$

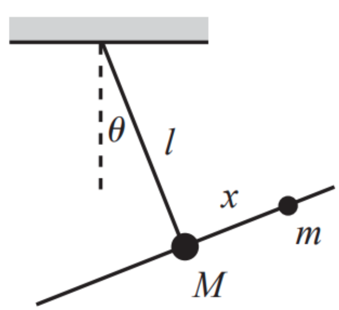
Ez a szög irányában egy ω frekvenciás oszcilláció, ami az x irányra egy $-\frac{ml}{m+M}$ faktorral terjed át. A mozgásegyenletek megoldása tehát ebben a formalizmusban:

$$\begin{pmatrix} x \\ \vartheta \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} -\frac{ml}{m+M} \\ 1 \end{pmatrix}\cos(\omega t + \delta) + B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos(0t + \delta_0) \tag{4.1.36}$$

Ez szépen visszaadja a "rendes" megoldásunk oszcilláló részét: láthatjuk viszont, hogy az egyenes mozgás kiesett.

4.2. példa: Rudas inga

Vegyünk egy l hosszúságú ingát, aminek a végére rögzítsünk egy M tömegpontot. Ezen a ponton fűzzünk át az ingára merőlegesen egy sínt: erre pedig rakjunk egy m tömegű testet. *Mik a normálmódusok?*



2. ábra. Rudas inga ábrája. A változók nekünk θ és x helyett φ és r

Tippeljük meg ismét a jó általános koordinátákat: ha a tömegek egybeesnek, és az inga pont lefelé mutat, egyensúlyban vagyunk. Legyenek az ettől való eltérés általános koordinátái φ és r. Az M tömegpont Descartes-i koordinátái (a potenciál nullpontjához illeszkedve):

$$\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\sin\varphi \\ -l\cos\varphi \end{pmatrix} \tag{4.2.1}$$

A kis tömegpont már bonyolultabb: ahhoz kell a rúd és a horizont közötti szög. Kis geometriával belátható, hogy az is φ. Ezzel

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \tag{4.2.2}$$

Deriválva:

$$\begin{pmatrix} \dot{x_M} \\ \dot{y_M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\dot\varphi\cos\varphi \\ l\dot\varphi\sin\varphi \end{pmatrix} \tag{4.2.3}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x_m} \\ \dot{y_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\dot\varphi\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\varphi + \dot r\cos\varphi \\ l\dot\varphi\sin\varphi - r\dot\varphi\cos\varphi - \dot r\sin\varphi \end{pmatrix} \tag{4.2.4}$$

Emeljük ezeket négyzetre:

$$\dot{x_M}^2 + \dot{y_M}^2 = l^2\dot\varphi^2 \tag{4.2.5}$$

$$\dot{x_m}^2 = ((l\dot\varphi + \dot r)\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\varphi)^2 \qquad \dot{y_m}^2 = ((l\dot\varphi - \dot r)\sin\varphi - r\dot\varphi\cos\varphi)^2 \tag{4.2.6}$$

$$\dot{x_m}^2 = (l\dot\varphi + \dot r)^2\cos^2\varphi + r^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi - 2(l\dot\varphi + \dot r)r\dot\varphi\cos\varphi\sin\varphi \tag{4.2.7}$$

$$\dot{y_m}^2 = (l\dot\varphi - \dot r)^2\sin^2\varphi + r^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi - 2(l\dot\varphi - \dot r)r\dot\varphi\cos\varphi\sin\varphi \tag{4.2.8}$$

Összeadva a komponenseket

$$\begin{aligned} \dot{x_m}^2 + \dot{y_m}^2 = (l\dot\varphi + \dot r)^2\cos^2\varphi + (l\dot\varphi - \dot r)^2\sin^2\varphi+ \\ +r^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi + r^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi+ \\ -2(l\dot\varphi + \dot r)r\dot\varphi\cos\varphi\sin\varphi - 2(l\dot\varphi - \dot r)r\dot\varphi\cos\varphi\sin\varphi \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

$$\begin{aligned} \dot{x_m}^2 + \dot{y_m}^2 = (l^2\dot\varphi^2 + \dot r^2 + 2l\dot\varphi\dot r)\cos^2\varphi + (l^2\dot\varphi^2 + \dot r^2 - 2l\dot\varphi\dot r)\sin^2\varphi+ \\ +r^2\dot\varphi^2 - 4rl\dot\varphi^2\cos\varphi\sin\varphi \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

$$\begin{aligned} \dot{x_m}^2 + \dot{y_m}^2 = (l^2\dot\varphi^2 + \dot r^2)\cos^2\varphi + 2l\dot\varphi\dot r\cos^2\varphi + (l^2\dot\varphi^2 + \dot r^2)\sin^2\varphi - 2l\dot\varphi\dot r\sin^2\varphi+ \\ +r^2\dot\varphi^2 - 4rl\dot\varphi^2\cos\varphi\sin\varphi \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

$$\dot{x_m}^2 + \dot{y_m}^2 = 2l\dot\varphi\dot r(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + l^2\dot\varphi^2 + \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 - 4rl\dot\varphi^2\cos\varphi\sin\varphi \tag{4.2.12}$$

$$\dot{x_m}^2 + \dot{y_m}^2 = 2l\dot\varphi\dot r(1 - 2\sin^2\varphi) + l^2\dot\varphi^2 + \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 - 4rl\dot\varphi^2\cos\varphi\sin\varphi \tag{4.2.13}$$

$$\dot{x_m}^2 + \dot{y_m}^2 = 2l\dot\varphi\dot r + l^2\dot\varphi^2 + \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 - 4rl\dot\varphi^2\cos\varphi\sin\varphi - 4l\dot\varphi\dot r\sin^2\varphi \tag{4.2.14}$$

Amikkel a kinetikus tagok nagyjából készen is vannak. A potenciális:

$$V = -Mgl\cos\varphi - mg(l\cos\varphi - r\sin\varphi) \tag{4.2.15}$$

Ha rezgésekre vagyunk kíváncsiak, megint át kell írni az ebből kapott Lagrange-függvényt valamilyen közelítésekkel. A kis szög itt is működik, egy pontig:

$$\dot{x_m}^2 + \dot{y_m}^2 \approx 2l\dot\varphi\dot r + l^2\dot\varphi^2 + \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 - 4lr\dot\varphi^2\varphi - 4l\dot\varphi\dot r\varphi^2 \tag{4.2.16}$$

Viszont két változónk van: x-re is ki kell szabnunk valamit, ha benne is kicsik a rezgések. Praktikai szempontból pedig az a célunk, hogy mátrixosan tudjuk felírni a kinetikus tagot, tehát a tagjainkban csak $\dot{r}$ és $\dot{\varphi}$ szerepeljenek (szigorúan másodrendben), maguk a változók ne. Ezt a két problémát egy csapásra tudjuk megoldani, ha feltesszük hogy $r \ll l$ tehát $\frac{r}{l} \ll 1$. Ekkor megjelölve, hogy mi hányadrendű a kis változókban:

$$\dot{x_m}^2 + \dot{y_m}^2 \approx 2l^2 \underbrace{\dot{\varphi}\frac{\dot{r}}{l}}_{\mathcal{O}(2)} + l^2 \underbrace{\dot{\varphi}^2}_{\mathcal{O}(2)} + l^2 \underbrace{\frac{\dot{r}^2}{l^2}}_{\mathcal{O}(2)} + l^2 \underbrace{\frac{r^2}{l^2}\dot{\varphi}^2}_{\mathcal{O}(4)} - 4l^2 \underbrace{\frac{r}{l}\dot{\varphi}^2\varphi}_{\mathcal{O}(4)} - 4l^2 \underbrace{\dot{\varphi}\frac{\dot{r}}{l}\varphi^2}_{\mathcal{O}(4)} \tag{4.2.17}$$

láthatjuk, hogy csak az első három tag kell nekünk: egyrészt a többi már negyedrendű, másrészt pont ők azok, amik felírhatók mátrixosan. A teljesség jegyében még nézzük meg a potenciált is:

$$V \approx -\underbrace{Mgl}_{\mathcal{O}(0)} + \frac{Mgl}{2} \underbrace{\varphi^2}_{\mathcal{O}(2)} - \underbrace{mgl}_{\mathcal{O}(0)} + \frac{mgl}{2} \underbrace{\varphi^2}_{\mathcal{O}(2)} + mgl \underbrace{\frac{r}{l}\varphi}_{\mathcal{O}(2)} \tag{4.2.18}$$

Így a Lagrange

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{q}\underline{\underline{M}}\dot{q} - \frac{1}{2}q\underline{\underline{D}}q \tag{4.2.19}$$

ahol

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m & ml \\ ml & l^2(M+m) \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 0 & mg \\ mg & (m+M)lg \end{pmatrix} \tag{4.2.20}$$

A normálmódusok megtalálásához ismét számítsuk ki az $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{D}}$ mátrixot! Ehhez

$$\underline{\underline{M}}^{-1} = \frac{1}{ml^2(M+m) - m^2l^2} \begin{pmatrix} l^2(M+m) & -ml \\ -ml & m \end{pmatrix} = \frac{1}{Ml} \begin{pmatrix} l\frac{M+m}{m} & -1 \\ -1 & \frac{1}{l} \end{pmatrix} \tag{4.2.21}$$

Amivel

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{Ml} \begin{pmatrix} l\frac{M+m}{m} & -1 \\ -1 & \frac{1}{l} \end{pmatrix} mg \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{m+M}{m}l \end{pmatrix} = \frac{m}{M}\frac{g}{l} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{l} & \frac{M}{m} \end{pmatrix} \tag{4.2.22}$$

Amiből a sajátértékek egyenlete:

$$\omega^4 - \frac{g}{l}\left(\frac{M-m}{M}\right)\omega^2 - \frac{m}{M}\left(\frac{g}{l}\right)^2 = 0 \tag{4.2.23}$$

Most rábízva a szimbolikus programokra a megoldást, azok

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} \qquad \omega_2^2 = -\frac{m}{M}\frac{g}{l} \tag{4.2.24}$$

A normálmódusok pedig (normálás nélkül):

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \eta_2 = \begin{pmatrix} -l\frac{m+M}{m} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.2.25}$$

Gerjesztések

A harmonikus mozgásokkal már jól megbarátkoztunk. Ezeknek eggyel bonyolultabb esete, ha vesszük az eddigi rezgő rendszerünket, és rákapcsolunk valami külső erőt. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy mi lesz ekkor a mozgás, feltéve, hogy a külső erő nélküli rendszert már ismerjük. Egy matekos ismétlésként nézzük a következő differenciálegyenletet:

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2)x(t) = f(t)$$

és gyorsan vegyük át a lépéseket a megoldásához.

Először is: ez bonyolult. Oldjuk meg először x helyett valami G függvényre abban az eseten, ha a jobb oldalt szereplő erő csak egy Dirac-delta.

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2)G(t) = \delta(t)$$

Ő azért jó nekünk, mert az ismeretében *tetszőleges* $f(t)$ erőre meg tudjuk mondani a megoldást:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - t')f(t')\mathrm{d}t'$$

Ezt ha behelyettesítjük az eredeti egyenletbe, akkor láthatjuk, hogy megoldja azt. Minden esetre még csak alrébbtoltuk a problémát: most x helyett a G **Green-függvényt** kell megtalálnunk. Ez kinézhető táblázatokból, például a harmonikus oszcillátor rendszerére:

$$G(t) = \Theta(t)\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}$$

amivel tetszőleges gerjesztőerőre fel tudjuk írni a megoldást, a fenti integrállal.

Persze minket most a mátrixos jelölés érdekel. Ekkor a mozgásegyenletünk igazából

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{q}} + \underline{\underline{D}}\,\underline{q} = \underline{F}$$

Ezt kicsit alakítva

$$\underline{\ddot{q}} + \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{D}}\,\underline{q} = \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{F}$$

Hasonlóan a fentihez, ennek általános megoldása helyett először nézzük a

$$(\partial_t^2 + \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{D}})\hat{G}(t) = \delta(t)$$

egyenletet. A sima oszcillátor megoldásából idézzük vissza, hogy megtaláltuk $\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{D}}$ sajátrendszerét: ezek voltak a normálmódusok, amikre

$$(\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{D}})\underline{\eta_i} = \omega_i^2\underline{\eta_i}$$

A sajátvektorok diadikus szorzatát felhasználva pedig felírhatunk két fontos mátrixot velük:

$$\underline{\underline{I}} = \sum_i \underline{\eta_i}\,\underline{\tilde{\eta}_i} \qquad \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{D}} = \sum_i \omega_i^2\underline{\eta_i}\,\underline{\tilde{\eta}_i}$$

Ahol megjelenik $\underline{\tilde{\eta}_i}$, a sajátvektorhoz tartozó duális, amire $\underline{\tilde{\eta}_i}\,\underline{\eta_j} = \delta_{ij}$. Ha a sajátrendszer teljes és ortogonális, őt vehetjük egyszerűen a vektor transzponáltjának. Minden esetre ezzel a lépéssel rögzítettük a bázisunkat a sajátrendszerhez, amit tartsunk fejben. Ha visszaírunk mindent, és addig hunyorítunk hogy ne lássunk vektorokat, akkor ez úgy néz ki mint a sima oszcillátor, tehát

$$\text{"}\hat{G}(t) \propto -\sum_i \frac{\sin(\omega_i t)}{\omega_i}\text{"}$$

kinézetű megoldást keresünk, a vektoros-mátrixos részen kívül.

A mátrixos részhez emlékezzünk vissza, hogy a Green függvény

$$\int \hat{G}(t-t')\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{F}$$

alakban szerepel nekünk a megoldásban: hatni fog valamilyen vektorra. Ha mi eddig a sajátbázisban dolgoztunk, akkor ezt az $M^{-1}F$ vektort is át kell rá transzformálni. Így a helyes mátrixos alakba bekerül még az $M^{-1}F$ vektor átírása is erre a bázisra (meg persze egy Θ lépcsőfüggvény):

$$\hat{G}(t) = \underline{\underline{G}}(t) = \Theta(t)\sum_i \frac{\sin(\omega_i t)}{\omega_i}\underline{\eta_i\tilde{\eta}_i}$$

Kicsit nézegetve ez két dolgot csinál. Először is, hattatva a gerjesztő erőre, azt levetíti valamelyik sajátmódus irányába. Ebben az irányban pontosan úgy hat, mint a sima oszcillátorra a gerjesztés. Ezeket összegezve az összes módusra, megkapjuk a teljes hatását a forrástagnak. Mindez persze szép bonyolultan hangzik, szóval nézzünk is rá pár példát!

4.3. példa: Szinuszos gerjesztés harmonikus oszcillátorra

Bemelegítésként nézzünk meg egy sima harmonikus oszcillátort, amire rákapcsolunk egy Ω frekvenciájú, f_0 amplitúdójú szinuszos gerjesztést a $t = 0$ pillanattól kezdve:

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2)x = f(t) \tag{4.3.1}$$

$$f(t) = f_0 \sin(\Omega t)\Theta(t) \tag{4.3.2}$$

Itt a gerjesztőerőben a $\Theta(t)$ lépcsőfüggvény a "$t = 0$ *pillanattól kezdve*" szófordulat átfogalmazása matekra.

Tudjuk, hogy a Green függvény ismeretében a megoldás

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')f(t')\mathrm{d}t' \tag{4.3.3}$$

és hogy a sima oszcillátorra

$$G(t) = \Theta(t)\frac{\sin\omega t}{\omega} \tag{4.3.4}$$

Mivel a forrásmentes rendszer egy sima harmonikus oszcillátor, amit ismerünk, nincs más dolgunk, mint beírni ezeket az integrálba, ügyelve, hogy minek mi az argumentuma:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t-t')\frac{\sin\omega(t-t')}{\omega} f_0 \sin(\Omega t')\Theta(t')\mathrm{d}t' \tag{4.3.5}$$

Nézzük meg mit csinálnak ezek a lépcsőfüggvények. A $\Theta(t')$ annyit tud, hogy $t' = 0$ alatt nulla, felette pedig egy. Ezzel be van szorozva az integrandus: tehát annyit tesz, mintha $-\infty$ helyett 0-tól integrálnánk. A másik, $\Theta(t-t')$ akkor lesz nulla, ha $t - t' < 0$, tehát ha $t' > t$. Ez egy felső korlátot ad az integrálunknak t-nél. Ezeket beírva, illetve kiemelve mindent ami konstans:

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega}\int_0^t \sin[\omega(t-t')]\sin(\Omega t')\mathrm{d}t' \tag{4.3.6}$$

Nézzük meg hogyan kell elvégezni egy ilyen integrált kézzel, papíron. Először is, trigonometriából tudjuk, hogy

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{4.3.7}$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \tag{4.3.8}$$

Az alsóból kivonva a fölsőt:

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2 \sin x \sin y \tag{4.3.9}$$

Tehát nekünk:

$$\sin\left[\omega(t-t')\right]\sin\left(\Omega t'\right) = \frac{\cos\left[\omega(t-t') - \Omega t'\right] - \cos\left[\omega(t-t') + \Omega t'\right]}{2} \tag{4.3.10}$$

Amivel az integrálunk két rész összegéből fog állni:

$$\frac{1}{2}\int_0^t \cos\left[\omega(t-t') - \Omega t'\right]\mathrm{d}t' - \frac{1}{2}\int_0^t \cos\left[\omega(t-t') + \Omega t'\right]\mathrm{d}t' \tag{4.3.11}$$

Nézzük most csak az elsőt, és vezessünk be egy u változócserét:

$$u = \omega(t-t') - \Omega t' \tag{4.3.12}$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t'} = -\omega - \Omega = -(\Omega + \omega) \tag{4.3.13}$$

Tehát az integrál:

$$\int_0^t \cos\left[\omega(t-t') - \Omega t'\right]\mathrm{d}t' = -\frac{1}{\Omega+\omega}\int \cos u \mathrm{d}u \tag{4.3.14}$$

Amire kell még figyelnünk, azok a határok. Ezek rendre:

$$u(t'=0) = \omega t \qquad\qquad u(t'=t) = -\Omega t \tag{4.3.15}$$

ahol feltűnhet, hogy a fenti határ igazából lentebb van, mint a lenti. Ezeket felcserélhetjük, ami hoz egy negatív szorzót az integrál elé, így:

$$-\frac{1}{\Omega+\omega}\int \cos u \mathrm{d}u = \frac{1}{\Omega+\omega}\int_{-\Omega t}^{\omega t} \cos u \mathrm{d}u \tag{4.3.16}$$

Ezt már egyszerű kiintegrálni:

$$\frac{1}{\Omega+\omega}\int_{-\Omega t}^{\omega t} \cos u \mathrm{d}u = \frac{1}{\Omega+\omega}\left[\sin\omega t - \sin\left(-\Omega t\right)\right] \tag{4.3.17}$$
$$= \frac{1}{\Omega+\omega}\left[\sin\omega t + \sin\Omega t\right] \tag{4.3.18}$$

A másik integrálunk is hasonló lesz, annyi különbséggel, hogy ott

$$w = \omega(t-t') + \Omega t' \tag{4.3.19}$$
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t'} = -\omega + \Omega = \Omega - \omega \tag{4.3.20}$$

illetve

$$w(t'=0)=\omega t \qquad\qquad w(t'=t)=\Omega t \tag{4.3.21}$$

Tehát ez az integrál:

$$\int_0^t \cos\left[\omega(t-t')+\Omega t'\right]\mathrm{d}t' = \frac{1}{\Omega-\omega}\int_{\omega t}^{\Omega t}\cos w \mathrm{d}w \tag{4.3.22}$$

$$= \frac{1}{\Omega-\omega}\left[\sin\Omega t-\sin\omega t\right] \tag{4.3.23}$$

Véve a kettő különbségét, közös nevezőre tudunk hozni:

$$\frac{1}{\Omega+\omega}\left[\sin\omega t+\sin\Omega t\right]-\frac{1}{\Omega-\omega}\left[\sin\Omega t-\sin\omega t\right]= \tag{4.3.24}$$

$$=\frac{(\Omega-\omega)\sin\omega t+(\Omega-\omega)\sin\Omega t-(\Omega+\omega)\sin\Omega t+(\Omega+\omega)\sin\omega t}{(\Omega+\omega)(\Omega-\omega)} \tag{4.3.25}$$

$$=\frac{2\Omega\sin\omega t-2\omega\sin\Omega t}{\Omega^2-\omega^2} \tag{4.3.26}$$

Visszaírva minden elhagyott szorzó faktort, ezzel a megoldásunk:

$$x(t)=\frac{f_0}{\omega}\frac{\Omega\sin\omega t-\omega\sin\Omega t}{\Omega^2-\omega^2} \tag{4.3.27}$$

Így megkaptuk egzakt formában a kitérés-idő függvényt. Vele már tudunk számolni bármit, ami érdekelhet a mozgásról. Most például nézzük meg, hogy hol lesz a kitérés nulla, tehát

$$x(t_0)=0 \tag{4.3.28}$$

Ehhez

$$\frac{f_0}{\omega}\frac{\Omega\sin\omega t_0-\omega\sin\Omega t_0}{\Omega^2-\omega^2}=0 \tag{4.3.29}$$

$$\Omega\sin\omega t_0-\omega\sin\Omega t_0=0 \tag{4.3.30}$$

$$\Omega\sin\omega t_0=\omega\sin\Omega t_0 \tag{4.3.31}$$

$$\frac{\sin\omega t_0}{\sin\Omega t_0}=\frac{\omega}{\Omega} \tag{4.3.32}$$

Vegyük azt a speciális esetet, ahol $\Omega=2\omega$. Ekkor

$$\frac{\sin\omega t_0}{\sin(2\omega t_0)}=\frac{1}{2} \tag{4.3.33}$$

Egy addíciós tétel után

$$\sin 2x=2\sin x\cos x \tag{4.3.34}$$

tehát

$$\frac{\sin\omega t_0}{2\sin\omega t_0\cos\omega t_0}=\frac{1}{2} \tag{4.3.35}$$

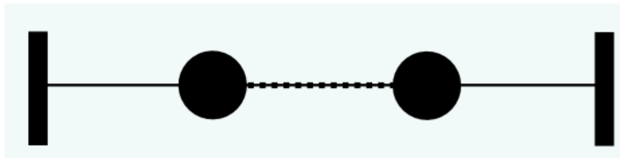
$$\frac{1}{\cos\omega t_0}=1 \tag{4.3.36}$$

Ami teljesül, ha

$$\omega t_0=2k\pi \qquad\qquad k\in\mathbb{Z} \tag{4.3.37}$$

4.4. példa: Tripla rugós kéttest rendszer

Most nézzünk valami tényleges fizikai rendszert ami nem csak közelítve lesz oszcillátor: két különböző m_1, m_2 tömegű golyót, amiket kössön össze egymással egy K állandójú rugó; illetve a hozzájuk közelebbi falakkal 1-1 rendre k_1 és k_2 állandójú rugó.



3. ábra. Rugós rendszer vázlatos rajza.

Legyenek az általános koordinátáink az egyensúlyi helyzettől való eltérést leíró q_1 és q_2. Ekkor a Lagrange:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{q_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q_2}^2 - \frac{1}{2}k_1 q_1^2 - \frac{1}{2}k_2 q_2^2 - \frac{1}{2}K(q_2 - q_1)^2 \tag{4.4.1}$$

Ezt mátrixossá alakíthatjuk:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{q_1}\\ \dot{q_2}\end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix}m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix}\dot{q_1}\\ \dot{q_2}\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix}k_1+K & -K\\ -K & k_2+K\end{pmatrix}}_{=D} \begin{pmatrix}q_1\\ q_2\end{pmatrix} \tag{4.4.2}$$

Visszaidézve még a sima rugóknál használt $\omega^2 = \frac{k}{m}$ frekvenciát, dimenziótlanítani is tudjuk a mátrixokat, majd megoldani a sajátérték-problémát.

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix}1/m_1 & 0\\ 0 & 1/m_2\end{pmatrix}}_{=M^{-1}} \begin{pmatrix}k_1+K & -K\\ -K & k_2+K\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{k_1+K}{m_1} & -\frac{K}{m_1}\\ -\frac{K}{m_2} & \frac{k_2+K}{m_2}\end{pmatrix} \tag{4.4.3}$$

Legyen $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}$, $\omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}$, $\alpha = \frac{K}{k_1}$ és $\beta = \frac{K}{k_2}$, amikkel

$$A = \begin{pmatrix}w_1^2(1+\alpha) & -w_1^2\alpha\\ -\omega_2^2\beta & w_2^2(1+\beta)\end{pmatrix} \tag{4.4.4}$$

Végül, ha bevezetjük még $\gamma = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}$-et:

$$A = w_1^2\begin{pmatrix}1+\alpha & -\alpha\\ -\gamma\beta & \gamma(1+\beta)\end{pmatrix} \tag{4.4.5}$$

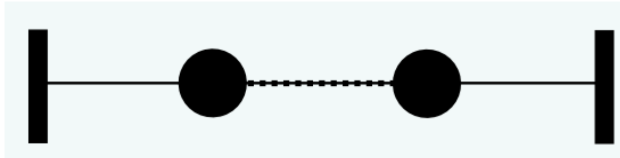
Az általános megoldáshoz ennek kellene megoldani a sajátérték-problémáját.

4.5. példa: Háromrugós rendszer gerjesztése

Nézzük meg az előző rendszert, csak kicsit leegyszerűsítve az elrendezést, hogy tükörszimmetrikus legyen. Hattassuk erre egy erőt a következő alakban:

$$f(t) = \frac{f_0}{\tau}\Theta(t)\Theta(\tau - t) \tag{4.5.1}$$

Tehát egy konstans erő a $t \in [0, \tau]$ időintervallumban, azon kívül pedig nulla. Diskutáljuk, hogy mi történik annak függvényében, hogy melyik testre hatunk vele.



4. ábra. Falas-rugós rendszer.

4.5.1. Sajátmódusok

Legyen most szimmetrikus a rendszer, tehát $m_1 = m_2$ és $k_1 = k_2 \neq K$. Emlékeztetőül, ekkor a mátrixaink:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} k+K & -K \\ -K & k+K \end{pmatrix} \tag{4.5.2}$$

amivel egyszerűen

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{m}\underline{\underline{D}} \tag{4.5.3}$$

A sajátértékekre ekkor:

$$\left(\frac{k+K}{m} - \omega^2\right)^2 - \frac{K^2}{m^2} = 0 \tag{4.5.4}$$

Legyen a lustaság kedvéért $\omega_0^2 = k/m$ és $\Omega_0^2 = K/m$, így

$$\left(\Omega_0^2 + \omega_0^2 - \omega^2\right)^2 - \Omega_0^4 = 0 \tag{4.5.5}$$

$$\omega^4 - 2(\Omega_0^2 + \omega_0^2)\omega^2 + (\Omega_0^2 + \omega_0^2)^2 - \Omega_0^4 = 0 \tag{4.5.6}$$

$$\omega^2 = \Omega_0^2 + \omega_0^2 \pm \sqrt{(\Omega_0^2 + \omega_0^2)^2 - (\Omega_0^2 + \omega_0^2)^2 + \Omega_0^4} \tag{4.5.7}$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \qquad \omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\Omega_0^2 \tag{4.5.8}$$

Az ezekhez tartozó sajátmódusok pedig, mivel

$$A = \begin{pmatrix} \omega_0^2 + \Omega_0^2 & -\Omega_0^2 \\ -\Omega_0^2 & \omega_0^2 + \Omega_0^2 \end{pmatrix} \tag{4.5.9}$$

innen kis matekkal

$$\underline{\eta_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\eta_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{4.5.10}$$

Ezek ugyebár két harmonikus mozgást írnak le: az elsőnél a két test azonos irányba mozdul ki, a másiknál pedig ellentétesbe. Ezekhez a módusokhoz kell illesztenünk a gerjesztésünket. Tehát a Green függvényünk komponensei a sajátmódusok rendszerén, kihasználva, hogy most teljes ortonormált:

$$\left(\frac{1}{\Theta(t)}\cdot\right)\underline{\underline{G}}(t) = \sum_i \frac{\sin(\omega_i t)}{\omega_i}\underline{\eta\tilde{\eta}} = \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1}\underline{\eta_1\eta_1}^T + \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2}\underline{\eta_2\eta_2}^T \tag{4.5.11}$$

Ha ezt hattatjuk a gerjesztő erőnkre, akkor az $\underline{\eta\eta}^T$ tagok gyakorlatilag egy projektorfelbontást fognak rajta végezni: fel kell írnunk a forrástagunkat ezekkel a vektorokkal.

4.5.2. Azonos lökés

Ha mindkét testet azonos erővel lökdössük, akkor ezen a bázison az erő:

$$\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{F} = \frac{F(t)}{m} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad F(t) = \frac{f_0}{\tau}\Theta(t)\Theta(\tau - t) \tag{4.5.12}$$

Tehát a koordináták időfejlődése:

$$\underline{q} = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t')\Theta(\tau - t')\Theta(t - t')\frac{f_0}{m\tau}\frac{\sin(\omega_1(t - t'))}{\omega_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t' \tag{4.5.13}$$

Vegyük azt az esetet, ahol $t > \tau$, és nézzük meg mi történik a lépcsőfüggvényekkel. A $\Theta(t')$ a lenti határt fogja megadni, hiszen $-\infty$ és 0 közt nullával szoroz mindent. A másik kettő a felső határt: az egyik t a másik τ felett szoroz mindent nullával. Mivel itt τ a kisebb, ő lesz a felső határunk:

$$\underline{q} = \int_{0}^{\tau} \frac{f_0}{m\tau}\frac{\sin(\omega_1(t - t'))}{\omega_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t' \tag{4.5.14}$$

Az integrálás után:

$$\underline{q} = \frac{f_0}{m\tau\omega_0^2}\left[\cos(\omega_0(t - \tau)) - \cos(\omega_0 t)\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.5.15}$$

Nézzük meg mi történik, ha $\tau \to 0$. Ez annak felel meg, hogy a rendszer egy pillanatnyi lökést kap, aztán szabadon fejlődik az időben. Egy kis átírással:

$$\underline{q} = \frac{f_0}{m\omega_0^2}\frac{\cos(\omega_0(t - \tau)) - \cos(\omega_0 t)}{\tau} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.5.16}$$

ami ebben a határesetben nem más lesz, mint egy derivált régimódi képlete. Tehát:

$$\underline{q} \to \frac{f_0}{m\omega_0} \sin\omega_0 t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.5.17}$$

a kis löket után a rugók az első módusban rezegnek, azonos irányban. Ennek a frekvenciája ω_0, az amplitúdója pedig $f_0/m\omega_0$.

4.5.3. Baloldali lökés

Mi történik, ha csak az első rugóra hat külső gerjesztés? Ekkor az erő felbontása

$$\underline{F} = \frac{F}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{F}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{4.5.18}$$

Ezt kétféleképpen is megkaphatjuk: egyrészt ezt adja a didaktikus szorzatból készített két projektor. Másrészt vegyük észre, hogy ha össze adjuk őket

$$\underline{F} = \frac{F}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{F}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{F}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.5.19}$$

akkor csak az első komponensben lesz rezgés, pont ahogyan azt a feladat kéri. Ha nem vagyunk biztosak, akkor csináljuk meg a projektálást.

Minden esetre most az integrálunkban két tag is lesz:

$$\underline{q} = \frac{f_0}{2m\tau}\int_0^\tau \frac{\sin\left(\omega_1(t-t')\right)}{\omega_1}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{\sin\left(\omega_2(t-t')\right)}{\omega_2}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\mathrm{d}t' \tag{4.5.20}$$

Ezt kiszámítva

$$\underline{q} = \frac{f_0}{2m\tau\omega_1^2}\left[\cos\left(\omega_1(t-\tau)\right) - \cos\left(\omega_1 t\right)\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{f_0}{2m\tau\omega_2^2}\left[\cos\left(\omega_2(t-\tau)\right) - \cos\left(\omega_2 t\right)\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \tag{4.5.21}$$

Itt szintén alkalmazzuk a $\tau \to 0$ határesetet:

$$\underline{q} \to \frac{f_0}{2m\omega_1}\sin\omega_1 t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{f_0}{2m\omega_2}\sin\omega_2 t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \tag{4.5.22}$$

Ez a mozgás tehát két részből áll: azonos irányban feleakkora amplitúdójú rezgést végeznek a rugók mint az első esetben; viszont megjelenik egy ellentétes irányú módus is, a hozzá tartozó ω_2 frekvenciával.

Vegyük még ellenőrzésül radikális esetnek azt, amikor a középső rugón $K = 0$, mert ekkor

$$\omega_0^2 = \omega_0^2 + 2\Omega_0^2 \tag{4.5.23}$$

$$\omega_1 = \omega_2 \tag{4.5.24}$$

Beírva:

$$\underline{q} \to \frac{f_0}{2m\omega_0}\sin\omega_0 t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{f_0}{2m\omega_0}\sin\omega_0 t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \tag{4.5.25}$$

ami kis rendezés után

$$\underline{q} \to \frac{f_0}{m\omega_0}\sin\omega_0 t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{4.5.26}$$

Aminek örülünk: az első test pontosan úgy mozog, mint a fenti gerjesztő erő esetén; a második pedig nyugalomban marad. Ez logikus, mert $K = 0$ mellett nincs rugó ami összekötné a megmozgatott testtel.

4.5.4. Ellentétes szinuszos gerjesztés

Nézzünk meg erre a rendszerre is egy szinuszos gerjesztést $t = 0$ kezdettel, ami ellentétesen hat a két testre. Tehát a gerjesztő erőnk:

$$\underline{F}(t) = \Theta(t) f_0 \sin\left(\Omega t\right)\underline{\eta_2} \tag{4.5.27}$$

Erre hattatva a tömegmátrix inverzét:

$$\underline{\underline{M}}^{-1} = \Theta(t)\frac{f_0}{m}\sin\left(\Omega t\right)\underline{\eta_2} \tag{4.5.28}$$

majd pedig a Green-függvényt, ami most ismét csak az egyik móduson hat:

$$\underline{q} = \int_{-\infty}^{\infty}\Theta(t-t')\frac{\sin\left(\omega_2(t-t')\right)}{\omega_2}\Theta(t')\frac{f_0}{m}\sin\left(\Omega t'\right)\underline{\eta_2}\mathrm{d}t' \tag{4.5.29}$$

A határok ismét a lépcsőfüggvényekből adódnak: az első miatt a fenti határ t, a második miatt a lenti pedig 0. Tehát:

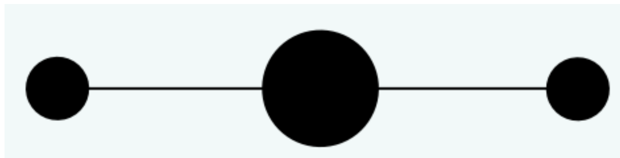
$$\underline{q} = \frac{f_0}{m\omega_2}\int_0^t \sin\left(\omega_2(t-t')\right)\sin\left(\Omega t'\right)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\mathrm{d}t' \tag{4.5.30}$$

Ez az integrál ugyanaz, mint a sima oszcillátornál, szóval a kiszámítását most kihagyjuk. Eredménye:

$$\underline{q} = \frac{f_0}{m\omega_2}\frac{\Omega\sin\omega_2 t - \omega_2\sin\Omega t}{\Omega^2 - \omega_2^2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \tag{4.5.31}$$

4.6. példa: Egyszerű molekula

Modellezzünk úgy egy kis molekulát, mint 3 test összekötve 2 rugóval. Legyenek a rugók és a kinti tömegek azonosak. Mik lesznek ekkor a sajátmódusok, és hogyan hatnak a rendszerre a külső gerjesztések?



5. ábra. Egy egyszerű molekula vázlatos rajza.

4.6.1. Normálmódusok

Felírva a Lagrange-ot, kis munkával kiderül, hogy itt a mátrixaink:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \tag{4.6.1}$$

Mivel M diagonális, könnyű invertálni: egyszerűen a tömegek reciprokai kellenek egy diagonális mátrixba. A szorzást elvégezve:

$$\underline{\underline{A}} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{m}{M} & 2\frac{m}{M} & -\frac{m}{M} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.6.2}$$

ahol bevezettem megint $\frac{k}{m} = \omega_0^2$-et. Ebből a sajátértékre vonatkozó egyenlet:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \left(2\omega_0^2 \frac{m}{M} - \omega^2\right) - 2\omega_0^4 \frac{m}{M}(\omega_0^2 - \omega^2) = 0 \tag{4.6.3}$$

Ránézésre két megoldást is be tudunk tippelni. Legyen az első $\omega = \omega_0$, ami általában egy jó tipp. Az ehhez tartozó sajátvektor

$$\begin{pmatrix} 1-1 & -1 & 0 \\ -\frac{m}{M} & 2\frac{m}{M} - 1 & -\frac{m}{M} \\ 0 & -1 & 1-1 \end{pmatrix} \underline{\eta_0} = 0 \tag{4.6.4}$$

alapján olyan lesz, hogy a második komponense nulla; az első és utolsó pedig egymás ellentettjei. Szépen normálva:

$$\underline{\eta_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{4.6.5}$$

Amivel meg is van az első módus: ebben a középső atom mozdulatlan, a másik kettő pedig ki-be rezeg körülötte.

A második sajátérték is könnyen tippelhető: legyen $\omega_1 = 0$. Ez is teljesíti az egyenletet, és a hozzá tartozó sajátvektor lehet például:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{m}{M} & 2\frac{m}{M} & -\frac{m}{M} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{\eta_1} = 0 \tag{4.6.6}$$

$$\underline{\eta_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.6.7}$$

Ez egy nulla frekvenciás rezgés, ami minden koordinátára azonosan hat. Hasonlóan a csúszkáló ingánál látotthoz, ez sem egy rezgés igazából: ez egy eltolás az x tengelyen, ami mindhárom atomra ugyanúgy hat.

A harmadik sajátérték nehezebb: ehhez már egy picit számolni is kell. Tudjuk, hogy ez egyik sajátérték ω_0^2, szóval emeljünk ki a sajátérték egyenletéből $(\omega_0^2 - \omega^2)$-et:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \left(2\omega_0^2 \frac{m}{M} - \omega^2\right) - 2\omega_0^4 \frac{m}{M}(\omega_0^2 - \omega^2) = 0 \tag{4.6.8}$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \left(2\omega_0^2 \frac{m}{M} - \omega^2\right) - 2\omega_0^4 \frac{m}{M}\right] = 0 \tag{4.6.9}$$

$$\omega^4 - \omega^2\omega_0^2 \left(1 + 2\frac{m}{M}\right) + 2\omega_0^4 \frac{m}{M} - 2\omega_0^4 \frac{m}{M} = 0 \tag{4.6.10}$$

$$\omega^4 - \omega^2\omega_0^2 \left(1 + 2\frac{m}{M}\right) = 0 \tag{4.6.11}$$

$$\omega^2 \left[\omega^2 - \omega_0^2 \left(1 + 2\frac{m}{M}\right)\right] = 0 \tag{4.6.12}$$

Tehát a harmadik megoldás $\omega_2^2 = \omega_0^2 \left(1 + 2\frac{m}{M}\right)$. Az ehhez tartozó sajátvektor számolását most kihagyom, eredménye:

$$\underline{\eta_2} = \frac{1}{\sqrt{2 + 4\alpha^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.6.13}$$

Ahol $\alpha = \frac{m}{M}$. Ez egy olyan módus, ahol a két szélső azonos irányba mozdul el, a középső viszont ellentétesen. A bejövő tömeges szorzófaktor azért olyan, amilyen, mert a tömegközéppont nem mozdulhat el.

4.6.2. Bal oldali összenyomás

Hattasunk a rendszerre most egy lökés szerű gerjesztőerőt, aminek az alakja:

$$\underline{F} = F(t) \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad F(t) = \frac{f_0}{\tau}\Theta(t)\Theta(\tau - t) \tag{4.6.14}$$

Tehát a bal oldali és a középső atomokat ellentétes irányba löki, a harmadikat pedig békén hagyja. Erre hattatva a tömegmátrix inverzét:

$$\underline{F} = \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{F} = F \begin{pmatrix} 2/m \\ -2/M \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2F}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.6.15}$$

Most nézzük meg tippelés nélkül, hogy hogyan kell ezt felbontani a sajátbázisra. Először is, hálistennek a $\underline{\eta_0}$ és $\underline{\eta_2}$ sajátértékek ortogonálisak, szóval nekik lehetnek a duálisok egyszerűen csak a transzponáltak. Velük:

$$\underline{\eta_0 \tilde{\eta}_0} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\eta_1 \tilde{\eta}_1} = \frac{1}{2+4\alpha^2}\begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & 1 \\ -2\alpha & 4\alpha^2 & -2\alpha \\ 1 & -2\alpha & 1 \end{pmatrix} \tag{4.6.16}$$

Ezekkel megszorozva a ható erőt:

$$\underline{\eta_0 \tilde{\eta}_0}\ \underline{F} = \frac{F}{m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{F}{m}\sqrt{2}\underline{\eta_0} \tag{4.6.17}$$

$$\underline{\eta_2 \tilde{\eta}_2}\ \underline{F} = \frac{F}{m}\frac{1}{1+2\alpha^2}\begin{pmatrix} 1+2\alpha^2 \\ -2\alpha+4\alpha^2 \\ 1+2\alpha^2 \end{pmatrix} = \frac{F}{m}\sqrt{2+4\alpha^2}\underline{\eta_1} \tag{4.6.18}$$

Ellenőrzésképp láthatjuk, hogy ezeknek az összege tényleg visszaadja $\underline{F}$-et. A harmadik irányra most nincs szükség.[1] Beírva végre a Green-függvényes alakot a rendszer időfejlődésére, az előző példát követve:

$$\underline{q} = \frac{f_0}{m\tau}\int_0^t \frac{\sin\left(\omega_0(t-t')\right)}{\omega_0}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\sin\left(\omega_2(t-t')\right)}{\omega_2}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2\alpha \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{d}t' \tag{4.6.19}$$

Ezt ismét ki tudjuk integrálni, majd megnézni az érdekes $\tau \to 0$ határesetet:

$$\underline{q} \to \frac{f_0}{m}\frac{\sin\left(\omega_0 t\right)}{\omega_0}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{f_0}{m}\frac{\sin\left(\omega_2 t\right)}{\omega_2}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2\alpha \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{d}t' \tag{4.6.20}$$

Mivel $\omega_2 = \omega_0\sqrt{1+2\alpha}$, meg tudjuk nézni mi történik $\alpha = 0$ határesetben: ez azt mondja ki, hogy a középső atom sokkal nehezebb, mint a szélsők. Ekkor a középső test módusai eltűnnek, az mozdulatlan marad. A másik kettőre pedig ebben a határesetben azonos frekvenciájú rezgések hatnak: a jobb oldali testre kioltják egymást, a bal oldalira pedig kétszeres amplitúdójú rezgéseket okoznak.

4.6.3. Eltolás Green-függvénnyel

Azért nézzük még meg az eltoláshoz kapcsolódó módust is, és lássuk be, hogy *tényleg* az eltolásokhoz kapcsolódik. Legyen a gerjesztőerő

$$\underline{F} = F\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{M}{m} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.6.21}$$

amivel

$$\underline{F} = \frac{f}{m}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.6.22}$$

[1] Mert az nem merőleges erre a kettőre, ezért direkt olyan erőt választottam, hogy ne kelljen vele számolni. Általános esetben mindhárom irány szerepelhetne. Ekkor a harmadik vektorunkat és a duálisát úgy kell megválasztani, hogy teljesüljön $\underline{\tilde{\eta}_i \eta_j} = \delta_{ij}$.

tehát ő $\underline{\eta_1}$ módushoz tartozik. Ezzel a gerjesztéssel

$$\underline{q} = \frac{f_0}{m\tau}\int_0^t \frac{\sin\left(\omega_1(t-t')\right)}{\omega_1}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \tag{4.6.23}$$

Ne ijedjünk meg, hogy $\omega_1 = 0$-val osztunk le, helyette számoljunk tovább. Kiintegrálva, majd a szokásos határesetet véve:

$$\underline{q} \to \frac{f_0}{m}\frac{\sin\left(\omega_1 t\right)}{\omega_1}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \tag{4.6.24}$$

Ezt szorozzuk be eggyel, ami t/t:

$$\underline{q} \to \frac{f_0}{m}\frac{\sin\left(\omega_1 t\right)}{\omega_1 t}t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \tag{4.6.25}$$

Majd használjuk ki, hogy $\frac{\sin\epsilon}{\epsilon} \approx 1$, ha ϵ kicsi. Nekünk most pontosan nulla, szóval elég jó lesz ez a közelítés:

$$\underline{q} \to \frac{f_0}{m}t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \tag{4.6.26}$$

Tehát azt kapjuk, hogy mindhárom testet meglökve, azok egy konstans $v = \frac{f_0}{m}$ sebességgel fognak reagálni. Ez egész intuitív, szóval jó látni, hogy végső soron csak ki tud jönni a rezgések nyelvén is.

4.6.4. Teljes duális rendszer

A teljesség jegyében nézzük még meg, hogy hogyan lehetne egy általános irányú gerjesztést is kiszámolni. A bázisunk:

$$\underline{\eta_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \qquad \underline{\tilde{\eta}_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix} \tag{4.6.27}$$

$$\underline{\eta_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \underline{\tilde{\eta}_1} = ??? \tag{4.6.28}$$

$$\underline{\eta_2} = \frac{1}{\sqrt{2+4\alpha^2}}\begin{pmatrix}1\\-2\alpha\\1\end{pmatrix} \qquad \underline{\tilde{\eta}_2} = \frac{1}{\sqrt{2+4\alpha^2}}\begin{pmatrix}1 & -2\alpha & 1\end{pmatrix} \tag{4.6.29}$$

Azok a duálisok amik már megvannak jók: rájuk könnyen láthatjuk, hogy teljesül $\underline{\tilde{\eta}_i}\underline{\eta_j} = \delta_{ij}$. Ez $\underline{\eta_1}^T$ transzponálttal nem működne, szóval keressük meg, hogy mivel igen.

Legyen

$$\underline{\tilde{\eta}_1} = \begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix} \tag{4.6.30}$$

majd nézzük meg mindhárom sajátvektorral a skalárszorzatát, és követeljük meg a δ teljesülését. Ezek rendre három egyenletet adnak:

$$x + y + z = 1 \tag{4.6.31}$$

$$x - z = 0 \tag{4.6.32}$$

$$x - 2\alpha y + z = 0 \tag{4.6.33}$$

Ezt kicsit átrendezve megoldja:

$$z = x \tag{4.6.34}$$
$$x = \alpha y \tag{4.6.35}$$
$$(2\alpha + 1)y = 1 \tag{4.6.36}$$

Tehát

$$x = \frac{\alpha}{2\alpha + 1} \tag{4.6.37}$$
$$y = \frac{1}{2\alpha + 1} \tag{4.6.38}$$
$$z = \frac{\alpha}{2\alpha + 1} \tag{4.6.39}$$
$$\tag{4.6.40}$$

Vagy tömörebben

$$\underline{\tilde{\eta_1}} = \frac{1}{2\alpha + 1} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix} \tag{4.6.41}$$

Ezzel a projektorunk

$$\underline{\eta_1 \tilde{\eta_1}} = \frac{1}{2\alpha + 1} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix} \tag{4.6.42}$$

Ellenőrzésképp, hogyha ezt hattatjuk a korábbi

$$\underline{F} = \frac{f}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.6.43}$$

erőre, akkor eredményül:

$$\underline{\eta_1 \tilde{\eta_1}}\ \underline{F} = \frac{f}{m} \frac{1}{2\alpha + 1} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.6.44}$$
$$= \frac{f}{m} \frac{1}{2\alpha + 1} \begin{pmatrix} 2\alpha + 1 \\ 2\alpha + 1 \\ 2\alpha + 1 \end{pmatrix} = \underline{F} \tag{4.6.45}$$

tehát jól dolgoztunk: tényleg ebbe az irányba projektál ez a diadikus szorzat.