

9. óra

Hatás-szög változók

Amennyiben van egy $\mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p})$ rendszerünk ami szépen viselkedik (integrálható, kötöttek az állapotok, nincs szeparátrix és explicit időfüggés) akkor létezik egy speckó kanonikus trafó a **hatás-szög** változópárokba, amikkel

$$\mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p}) = \mathcal{H}(\underline{P})$$

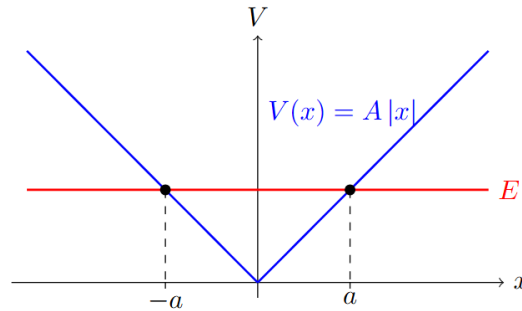
Ebben a (redukált) **hatás** változó nem más, mint egy fix energián vett pálya által bezárt fázistérfogat (elosztva 2π -vel):

$$P_i = \frac{1}{2\pi} \oint_E p_i dq_i$$

A mozgásegyenletek pedig jelentősen leegyszerűsödnek:

$$\dot{P}_i = 0 \quad \text{és} \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} = \omega.$$

9.1. példa: Abszolútérték potenciál



Általában ilyenkor a periódusidőre vagy a hozzá tartozó frekvenciára vagyunk kíváncsiak. Legyen például egy egydimenziós rendszerünk, aminek a potenciálja

$$V(x) = A|x| \tag{9.1.1}$$

A Hamilton tehát

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + A|q| \tag{9.1.2}$$

Feltéve, hogy az energia megmarad:

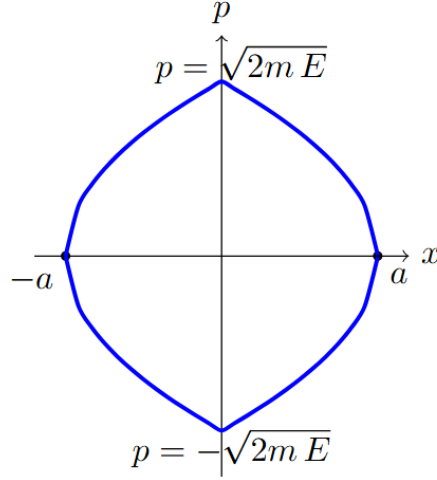
$$\mathcal{H} = E = \frac{p^2}{2m} + A|q| \tag{9.1.3}$$

$$\frac{p^2}{2m} = E - A|q| \tag{9.1.4}$$

$$p^2 = 2mE - 2mA|q| \tag{9.1.5}$$

$$p = \pm \sqrt{2mE - 2mA|q|} = \pm \sqrt{2mE} \sqrt{1 - \frac{A}{E}|q|} \tag{9.1.6}$$

ami leírja a fázisterünkön a trajektóriákat, adott E mellett.



Az energia a fordulópontban (ami legyen valami $x = q = a$) nem más, mint

$$E = Aa \rightarrow a = \frac{E}{A} \quad (9.1.7)$$

mivel ott nincs sebessége a tömegpontunknak. Egy periódus alatt tehát a bezárt terület

$$P = \frac{1}{2\pi} \oint_E p dq = \frac{1}{2\pi} 4 \cdot \int_0^a p(q) dq \quad (9.1.8)$$

$$P = \frac{1}{2\pi} 4\sqrt{2mE} \int_0^a \sqrt{1 - \frac{q}{a}} dq = \frac{1}{2\pi} 4\sqrt{2mE} \cdot \frac{2}{3}a \quad (9.1.9)$$

Itt az integrál amúgy egy egyszerű $1 - \frac{q}{a} \rightarrow u$ változócserevel jön ki.

Minden esetre:

$$P = \frac{4}{3\pi} a\sqrt{2mE} = \frac{4}{3\pi} \frac{\sqrt{2m}}{A} E^{3/2} \quad (9.1.10)$$

Ahol figyeljünk, hogy $a(E)$ függés is van, azt is vissza kellett írni. Ebből kell nekünk invertálni $P(E)$ függvényt $E(P)$ -re:

$$P^{2/3} = \left(\frac{4}{3\pi} \frac{\sqrt{2m}}{A} \right)^{2/3} E \quad (9.1.11)$$

$$E = \mathcal{H} = \left(\frac{4}{3\pi} \frac{\sqrt{2m}}{A} \right)^{-2/3} P^{2/3} \quad (9.1.12)$$

Tehát:

$$\omega = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} = \left(\frac{4}{3\pi} \frac{\sqrt{2m}}{A} \right)^{-2/3} \cdot \frac{2}{3} P^{-1/3} \quad (9.1.13)$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{4}{3\pi} \frac{\sqrt{2m}}{A} \right)^{-2/3} \left(\frac{4}{3\pi} \frac{\sqrt{2m}}{A} \right)^{-1/3} E^{-1/2} \quad (9.1.14)$$

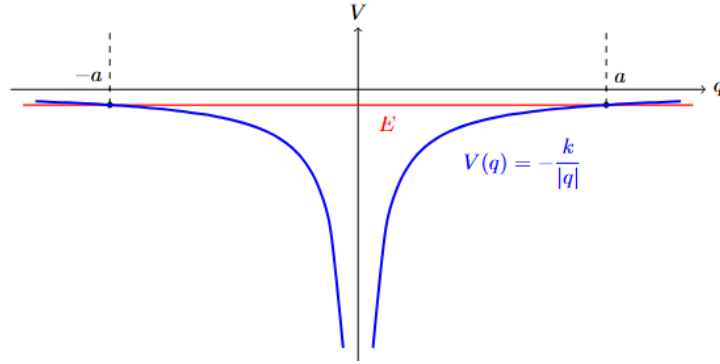
$$= \frac{\pi}{2} \frac{A}{\sqrt{2mE}} \quad (9.1.15)$$

9.2. példa: Hiperbolikus potenciál

Vizsgáljuk meg a

$$V(q) = -k \frac{1}{|q|} \quad (9.2.1)$$

potenciált! Felrajzolva azt látjuk, hogy ez is periodikus mozgásokat okoz, ha az energia negatív. Mi lesz ezeknek a frekvenciája?



Szisztematikusan kiindulva, írjuk fel a Hamiltont:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{|q|} \quad (9.2.2)$$

Majd fejezzük ki a lendületet konstans (negatív) energia mellett:

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{k}{|q|} - |E| \quad (9.2.3)$$

$$p^2 = 2m \frac{k}{|q|} - 2m|E| \quad (9.2.4)$$

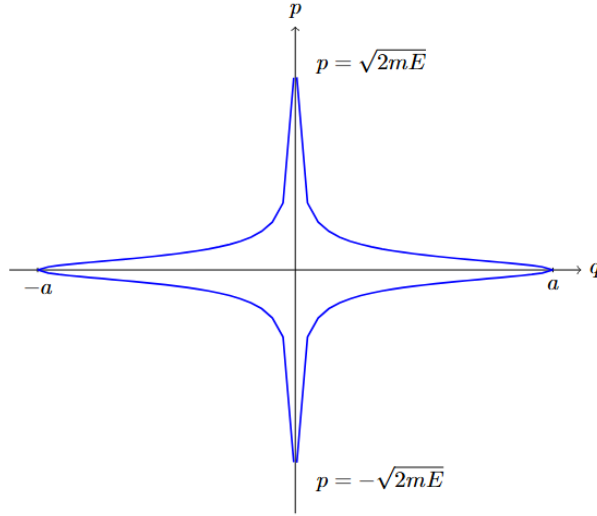
$$p^2 = -2m|E| \left(1 - \frac{k}{|E|} \frac{1}{|q|} \right) \quad (9.2.5)$$

$$p^2 = 2m|E| \left(\frac{k}{|E|} \frac{1}{|q|} - 1 \right) \quad (9.2.6)$$

$$p_{\pm} = \pm \sqrt{2m|E|} \sqrt{\frac{k}{|E|} \frac{1}{|q|} - 1} \quad (9.2.7)$$

Ezt szeretnénk majd kiintegrálni egy konstans energia által megadott zárt görbére. Mi lesz ez a körintegrál? Először is kiindulhat a rendszer valamilyen (pozitív) a pontból, ahol nincs sebessége, tehát $p_0 = 0$. Ezt követően legurul a $q = 0$ pontba, majd fel a völgy másik oldalán $-a$ -ig, mert szimmetrikus a potenciálunk. Innen visszagurul, amíg el nem éri a kiindulási pontot. Ez szép szimmetrikus: felbonthatjuk tehát a körintegrált 4 részre:

$$\oint_{E=E_0} = 4 \cdot \int_a^0 p_- dq = 4 \cdot \int_0^a p_+ dq \quad (9.2.8)$$



Amire szükségünk van, hogy mi lesz ez az a pont. Kifejezve az energiával, ebben a pontban nem lesz kinetikus energiánk, tehát

$$E = -\frac{k}{|a|} \quad (9.2.9)$$

$$|E| = \frac{k}{a} \quad (9.2.10)$$

$$a = \frac{k}{|E|} \quad (9.2.11)$$

Így a kiszámítandó integrál a hatáshoz:

$$J = 4 \cdot \int_0^{k/|E|} \sqrt{2m|E|} \sqrt{\frac{k}{|E|} \frac{1}{q} - 1} \, dq \quad (9.2.12)$$

Végezzünk el egy változócsere-t, amit két dolog motivál: egyrészt az integrál felső határa, másrészt pedig az integrandusban megjelenő faktorok a q mellett:

$$u = \frac{|E|}{k} q \quad du = \frac{|E|}{k} dq \quad (9.2.13)$$

$$u_0 = 1 \quad dq = \frac{k}{|E|} du \quad (9.2.14)$$

Ezzel az integrál nem lesz más, mint

$$J = 4\sqrt{2m|E|} \frac{k}{|E|} \cdot \underbrace{\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{u} - 1} du}_{=I} \quad (9.2.15)$$

Ahol az integrál eredménye valamilyen szám. Ne is számoljuk ki, csak folytassuk az átalakítást:

$$J = 4\sqrt{2mk} \frac{1}{\sqrt{|E|}} I \quad (9.2.16)$$

Megfeleltetve az energiát a Hamiltonnak, ezt át tudjuk rendezni:

$$\sqrt{|E|} = 4\sqrt{2mk}I \frac{1}{J} \quad (9.2.17)$$

$$|E| = 32mk^2 I^2 \frac{1}{J^2} \quad (9.2.18)$$

$$\mathcal{H} = -32mk^2 I^2 \frac{1}{J^2} \quad (9.2.19)$$

Ebben az alakban nem szerepel általános Q koordináta: J megmarad, így

$$\dot{Q} = \text{konst.} = \nu = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} \quad (9.2.20)$$

Számítsuk is ezt ki:

$$\nu = 2 \cdot 32mk^2 I^2 J^{-3} \quad (9.2.21)$$

$$\nu = 2 \frac{32mk^2 I^2}{(4\sqrt{2mk}I)^3} |E|^{3/2} \quad (9.2.22)$$

$$\nu = \frac{1}{2\sqrt{2m} k I} |E|^{3/2} \quad (9.2.23)$$

A teljesség jegyében még az integrált megoldhatjuk:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{u} - 1} \, du = \frac{\pi}{2} \quad (9.2.24)$$

Így a végleges eredményünk a periódusidőre:

$$T = \frac{1}{\nu} = \pi\sqrt{2m} k |E|^{-3/2} \quad (9.2.25)$$

Adiabatikus invariáns

A hatás-szög változók amúgy is szépek, mert periodikus mozgásra egyszerűek, ciklikusra vezetnek. Ezen felül van még egy hasznuk, akkor ha a rendszerünk egy paramétere *lassan* változik. A lassant itt úgy értjük, hogy a rendszerre jellemző saját időhöz képest. Ez egy kicsit absztrakt, szóval hozzuk közelebb. Vegyük a fenti példa alapján a hiperbolikus rendszer saját idejét, ha mondjuk $E = 2.7 \text{ J}$, $k = 1 \text{ Jm}$, $m = 1 \text{ kg}$. Ekkor

$$T = \pi\sqrt{2m} k |E|^{-3/2} \approx 1 \text{ s}$$

a részecske másodpercenként kering körbe körbe. Ehhez képest például ha a részecske tömegének mondjuk egy óra alatt elpárolog a fele, akkor az kellően lassú.

Ekkor létezik egy olyan mennyiség, ami a lassú változás ellenére is állandó marad. Ez nem más, mint maga a hatás-változó, amit ilyenkor **adiabatikus invariánsnak** nevezünk. Mivel ő állandó, segíthet nekünk hogy azokat a paramétereket, amiktől ő függ, egymással kapcsolatba hozzuk: meg tudjuk mondani például a fenti rendszerre, hogy mennyivel fog nőni az energiája, ha a k paraméter vagy a tömeg változik.

9.3. példa: Oszcillátor

Legyen

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2(t) q^2) \quad (9.3.1)$$

ahol lassan változik a frekvencia! Kíváncsiak vagyunk, hogy mit tudunk mondani a rendszer energiájáról, ha a frekvencia duplájára nő.

Kell először is az adiabatikus invariáns, ami maga a hatás:

$$J = \oint p dq = 4 \int_0^{q_0} p(q) dq \quad (9.3.2)$$

valami zárt pályára. Ezt úgy kapjuk, hogy megnézzük az energiák abban a q_0 pontban, ha a sebesség nulla:

$$q_0 = \frac{2E}{m\omega^2} \quad (9.3.3)$$

Illetve kell még maga a görbe, ami a lendület fix energiákra a koordináta függvényében:

$$p = \sqrt{2mE} \sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{2E} q^2} \quad (9.3.4)$$

Összerakva, a hatás változónk

$$J = 4\sqrt{2mE} \int_0^{q_0} \sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{2E} q^2} dq \quad (9.3.5)$$

Itt mindig jó ötlet az integrált valami fizikairól átírni valami pusztán matematikaira, ha lehetséges. Ehhez változócserekkkel próbálkozhatunk, itt például

$$\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} q = u \quad \longrightarrow \quad dq = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} u \quad (9.3.6)$$

ami után

$$J = 4\sqrt{2mE} \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du \quad (9.3.7)$$

$$P = \frac{J}{2\pi} = \frac{E}{\omega} \frac{4}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du \quad (9.3.8)$$

Mivel az integrál ebben pusztán egy szám, nem fog nekünk kellene. Azért gyakorlásként megnézzük:

$$u = \sin w \quad (9.3.9)$$

$$w = \arcsin u \quad (9.3.10)$$

$$\frac{dw}{du} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{\cos w} \quad (9.3.11)$$

$$du = \cos w dw \quad (9.3.12)$$

illetve a határokon

$$0 = \sin w_0 \quad \longrightarrow \quad w_0 = 0 \quad (9.3.13)$$

$$1 = \sin w_1 \quad \longrightarrow \quad w_1 = \frac{\pi}{2} \quad (9.3.14)$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-u^2} du = \int_0^{\pi/2} \cos^2 w dw \quad (9.3.15)$$

Mi lesz ez, egy fél periódusra kiátlagolva? Hát, kihasználva, hogy

$$\sin^2 + \cos^2 = 1 \quad (9.3.16)$$

ami egy fél periódusra könnyen kiintegrálható

$$\int_0^{\pi/2} 1 = \frac{\pi}{2} \quad (9.3.17)$$

Na de ennek pont a fele kell: az integrál tehát

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 w dw = \frac{\pi}{4} \quad (9.3.18)$$

Visszaírva mindent:

$$P = \frac{E}{\omega} \frac{4}{\pi} \frac{\pi}{4} = \frac{E}{\omega} \quad (9.3.19)$$

ami invariáns! Tehát az egyik változását kompenzálnia kell a másiknak, így

$$E \propto \omega \quad (9.3.20)$$

Tehát ha megváltozik a frekvencia, mondjuk duplájára $\omega' = 2\omega$, akkor

$$\frac{E}{\omega} = \frac{E'}{\omega'} \quad (9.3.21)$$

$$E' = \frac{E}{\omega} \omega' = 2E \quad (9.3.22)$$

azt látjuk, hogy az energia is kétszeresére nő.

9.4. példa: Pattogó labda

Legyen egy jó lassú liftben pattogó labdánk, amivel felkúszunk a MOL torony tetejére. Ekkor picit változni fog a gravitációs konstans az időben: a torony tetején $g' = 0.99995g$ lesz az értéke. Viszont gyorsan pattogtatjuk a labdát: egy periódus alatt alig vehető észre g időfüggése. Ha kezdetben 2 méter magasságban pattogott a labdánk, a torony tetején mekkora lesz az eltérése ettől a pattogásoknak?

Ugyebár a Hamiltonunk, a szokásos $K + V$ módon

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + mg(t)q \quad (9.4.1)$$

Ami itt érdekes lehet, az a fázistér: itt igazából nem lehet negatív a kitérés, ezért csak a pozitív q térfélen mozoghatunk. A maximális kitérés valamilyen h értéknél lesz, ahol nulla a lendület. Amikor pedig nulla a kitérés, akkor kétféle sebességünk is lehet: vagy negatív, amikor éppen lefelé zuhan a labda, vagy pozitív amikor már felpattant. A fázistér ezért egy háromszög lesz, ahol furcsamódon elteleportál a trajektória az egyik csúcsból a másikba. Ne aggódjunk emiatt.

Helyette számoljunk! Először is a lendület paraméterezése, illetve a megmaradó energia

$$p = \sqrt{2mE} \sqrt{1 - \frac{mg}{2E}q} \quad (9.4.2)$$

$$E_0 = mgh \quad (9.4.3)$$

amiből

$$J = \oint p dq = 2\sqrt{2mE} \int_0^{h=E/(mg)} \sqrt{1 - \frac{mg}{2E}q} dq \quad (9.4.4)$$

Játszuk itt el megint az integrál dimenziótlanítását!

$$\frac{mg}{2E}q = u \quad \rightarrow \quad dq = \frac{2E}{mg} du \quad (9.4.5)$$

$$u_0 = \frac{mg}{2E}h \quad \rightarrow \quad u_0 = \frac{1}{2} \quad (9.4.6)$$

$$J = \oint p dq = 2\sqrt{2mE} \frac{2E}{mg} \int_0^{1/2} \sqrt{1-u} du \quad (9.4.7)$$

$$= 2\sqrt{2mE} \frac{2E}{mg} \cdot I \quad (9.4.8)$$

$$= 4\sqrt{2m}^{-1/2} \frac{E^{3/2}}{g} \cdot I \quad (9.4.9)$$

Az integrál eredménye megint nem különösebben érdekes: ami számít, az

$$J \propto \frac{E^{3/2}}{g} = \text{konst.} \quad (9.4.10)$$

ergo

$$E \propto g^{2/3} \quad (9.4.11)$$

és mivel $h \propto E/g$, így

$$h \propto g^{-1/3} \quad (9.4.12)$$

Visszatérve a kérdésre: ha $g' = 0.99995g$, akkor

$$\frac{h}{g^{-1/3}} = \frac{h'}{g'^{-1/3}} \quad (9.4.13)$$

$$h' = h \frac{g'^{-1/3}}{g^{-1/3}} \quad (9.4.14)$$

$$h' = h \left(\frac{g'}{g} \right)^{-1/3} \quad (9.4.15)$$

$$h' \approx 2.00003 \text{ m} \quad (9.4.16)$$

Tehát 0.3 milliméterrel pattogna magasabbra a labda. Érdekességképp ha mondjuk a Titanic romjaihoz lemenve ismételnénk meg ezt a kísérletet, akkor ott már szinte mérhető, 8.1 milliméteres kitérést tapasztalnánk, csak a másik irányba.

Szimmetriák

Még a Poisson-zárójeleknél láthattuk, hogy egy tetszőleges bárminek az időfejlődése

$$\dot{f} = \{f, \mathcal{H}\}$$

Mi van akkor, ha valaminek *nincs* időfejlődése? Ekkor ez egy konstans, tehát egy megmaradó mennyiség. Ergo a Hamiltoni mechanika nyelvén azok lesznek a megmaradó mennyiségek, melyekre

$$\{f, \mathcal{H}\} = 0$$

9.5. példa: Forgatások

Kezdjük valami egyszerűvel: nézzünk egy centrális potenciált 2D-ben

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + V(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (9.5.1)$$

Lássuk be, hogy erre a forgatás egy szimmetria, és a hozzá tartozó megmaradó mennyiség a perdület. Először is:

$$L = xp_y - yp_x \quad (9.5.2)$$

tehát ami kell:

$$\{L, \mathcal{H}\} = \{xp_y - yp_x, \mathcal{H}\} \quad (9.5.3)$$

$$= \{xp_y, \mathcal{H}\} - \{yp_x, \mathcal{H}\} \quad (9.5.4)$$

$$= x\{p_y, \mathcal{H}\} + \{x, \mathcal{H}\}p_y - y\{p_x, \mathcal{H}\} - \{y, \mathcal{H}\}p_x \quad (9.5.5)$$

Mik ezek a zárójelek? Először is, írjuk ki az első

$$\{p_y, \mathcal{H}\} = \frac{\partial p_y}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} - \frac{\partial p_y}{\partial p_x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} - \frac{\partial p_y}{\partial p_y} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \quad (9.5.6)$$

ránézésre egyetlen egy lesz ami nem biztos, hogy nulla:

$$\{p_y, \mathcal{H}\} = -\frac{\partial p_y}{\partial p_y} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \quad (9.5.7)$$

$$= -1 \cdot \frac{\partial V(\sqrt{x^2 + y^2})}{\partial y} \quad (9.5.8)$$

Menjünk tovább! Hasonlóképp

$$\{x, \mathcal{H}\} = 1 \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} \quad (9.5.9)$$

$$= 1 \cdot \frac{p_x}{m} \quad (9.5.10)$$

Amiből az első két tag:

$$\{L, \mathcal{H}\} = -x\partial_y V + \frac{p_x p_y}{m} - y\{p_x, \mathcal{H}\} - \{y, \mathcal{H}\}p_x \quad (9.5.11)$$

Kis szimmetriával, a másik kettőt be tudjuk tippelni:

$$\{L, \mathcal{H}\} = -x\partial_y V + \frac{p_x p_y}{m} + y\partial_x V - \frac{p_x p_y}{m} \quad (9.5.12)$$

$$= -x\partial_y V + y\partial_x V \quad (9.5.13)$$

A potenciál csak a távolságtól függ, valahogyan. Bárhogyan is teszi azt, abban benne lesz egy közvetett függvényként való szerepe a gyökös kifejezésnek, tehát amikor azt deriváljuk

$$\partial_x V(\sqrt{x^2 + y^2}) \propto \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (9.5.14)$$

$$\partial_y V(\sqrt{x^2 + y^2}) \propto \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (9.5.15)$$

Összegezve ezek pont kiejtik egymást:

$$\{L, \mathcal{H}\} = c \cdot \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0 \quad (9.5.16)$$

ergo az L lendület egy megmaradó mennyiség.

Mit fog generálni? Ehhez nézzük meg, mik lesznek a megmaradó mennyiségünk parciális deriváltjai

$$\frac{\partial L}{\partial p_x} = -y \quad (9.5.17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_y} = x \quad (9.5.18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = p_y \quad (9.5.19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -p_x \quad (9.5.20)$$

És ezzel felírjuk a "mozgásegyenleteket", mintha maga L lenne nekünk egy Hamilton, valami s időszerű paraméterre. Ekkor, az s szerinti deriválást vesszővel jelölve:

$$x' = -y \quad y' = x \quad (9.5.21)$$

$$p'_x = -p_y \quad p'_y = p_x \quad (9.5.22)$$

ami egy szép diffegyenlet rendszer. Kicsit szórakozva vele:

$$x'' = -y' = -x \quad p''_x = -p'_y = -p_x \quad (9.5.23)$$

$$x = R \cos \omega s \quad p_x = P \cos \omega s \quad (9.5.24)$$

$$y = R \sin \omega s \quad p_y = P \sin \omega s \quad (9.5.25)$$

Látjuk, hogy az s paraméter egy forgatást okoz. Ezt le lehet rajzolni szépen a fázistérben, ahogy előadáson valószínűleg meg is tettétek.

9.6. példa: 2D-s oszcillátor

Legyen

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + m\omega^2(x^2 + y^2) \quad (9.6.1)$$

Vegyük észre hogy

$$\mathcal{H} = E_1 + E_2 \quad (9.6.2)$$

szóval hatás-szöggel

$$\mathcal{H} = \omega(P_1 + P_2) \quad (9.6.3)$$

szép egyszerű, de van más mód is.

Legyen egy szép mátrixunk, amelynek elemei

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{p_i p_j}{m} + m\omega^2 r_i r_j \right) \quad (9.6.4)$$

vegyük észre hogy

$$A_{11} = E_1 \quad A_{22} = E_2 \quad (9.6.5)$$

Kíváncsiak vagyunk még az offdiagonális elemre:

$$A_{12} = A_{21} = \frac{1}{2m} (p_x p_y + m^2 \omega^2 x y) \quad (9.6.6)$$

ez vajon megmarad-e, mint az energiák?

$$\{A_{12}, \mathcal{H}\} = \frac{\partial A_{12}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} - \frac{\partial A_{12}}{\partial p_x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + \frac{\partial A_{12}}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} - \frac{\partial A_{12}}{\partial p_y} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \quad (9.6.7)$$

$$= \frac{\omega^2 m}{2} y \cdot \frac{p_x}{m} - \frac{\omega^2 m}{2} x \cdot \frac{p_y}{m} - \omega^2 y p_x + \omega^2 y p_y \quad (9.6.8)$$

$$= 0 \quad (9.6.9)$$

Megmarad!

Ha már ezt tudjuk, akkor szeretnénk valamilyen intuitív fizikai jelentést is társítani hozzá. Ehhez gyötörjük kicsit

$$A_{12}^2 = \frac{1}{4m^2} (p_x p_y + m^2 \omega^2 x y)^2 \quad (9.6.10)$$

$$= \frac{1}{4m^2} (p_x^2 p_y^2 + m^4 \omega^4 x^2 y^2 + 2m^2 \omega^2 x y p_x p_y) \quad (9.6.11)$$

$$= \frac{p_x^2 p_y^2}{4m^2} + \frac{m^2 \omega^4}{4} x^2 y^2 + \frac{\omega^2}{2} x y p_x p_y \quad (9.6.12)$$

$$= \left(\frac{p_x^2}{2m} + m\omega^2 x^2 \right) \left(\frac{p_y^2}{2m} + m\omega^2 y^2 \right) - \frac{\omega^2}{4} (x^2 p_y^2 + y^2 p_x^2) + 2 \frac{\omega^2}{4} x y p_x p_y \quad (9.6.13)$$

$$= E_1 E_2 - \frac{\omega^2}{4} (x p_y - y p_x)^2 \quad (9.6.14)$$

$$= E_1 E_2 - \frac{\omega^2}{4} L^2 \quad (9.6.15)$$

Tehát az energiákból és a lendületből tevődik össze, valamilyen csúnya módon.

Szépítsük tovább! Legyen

$$S_1 = \frac{1}{\omega} \frac{A_{12} + A_{21}}{2} = \frac{A_{12}}{\omega} = \frac{p_x p_y}{2m\omega} + m\omega \frac{xy}{2} \quad (9.6.16)$$

$$S_2 = \frac{1}{\omega} \frac{A_{22} - A_{11}}{2} = \frac{1}{4m\omega} (p_y^2 - p_x^2) + \frac{y^2 - x^2}{4} m\omega \quad (9.6.17)$$

Ezek egy rakat mozgásállandóból tevődnek össze: ők maguk is azok lesznek. Miért szebbek? Nézzük meg a négyzetüket:

$$S_1^2 = \frac{A_{12}^2}{\omega^2} \quad (9.6.18)$$

$$S_2^2 = \frac{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1 E_2}{4\omega^2} \quad (9.6.19)$$

Az előzőek alapján, mi lesz az összegük?

$$S_1^2 + S_2^2 = \frac{E_1 E_2}{\omega^2} - \frac{1}{4} L^2 + \frac{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1 E_2}{4\omega^2} \quad (9.6.20)$$

$$= \frac{1}{4} L^2 + \frac{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2}{4\omega^2} - \frac{1}{4} L^2 \quad (9.6.21)$$

$$= \frac{1}{4} L^2 + \frac{(E_1 + E_2)^2}{4\omega^2} \quad (9.6.22)$$

szóval vezessük be még a teljesség jegyében a harmadik testvérüket

$$S_3 = \frac{L}{2} = \frac{x p_y - y p_x}{2} \quad (9.6.23)$$

amivel már

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \frac{H^2}{4\omega^2} \quad (9.6.24)$$

Mit mond ez? Egy adott energiára:

$$E = 2\omega \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \quad (9.6.25)$$

tudunk tekinteni egy 3D-s gömbfelületként az S-ek terében. Tudjuk viszont, hogy ezek megmaradó mennyiségek: milyen szimmetria tartozik hozzájuk? A gömb már segít megtippelni. Nézzük meg ehhez most a zárójeleiket egymással!

$$\{S_3, S_1\} = \frac{1}{2} \left\{ (x p_y - y p_x), \left(\frac{p_x p_y}{2m\omega} + m\omega \frac{xy}{2} \right) \right\} \quad (9.6.26)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left\{ x p_y, \left(\frac{p_x p_y}{2m\omega} + m\omega \frac{xy}{2} \right) \right\} - \left\{ y p_x, \left(\frac{p_x p_y}{2m\omega} + m\omega \frac{xy}{2} \right) \right\} \right] \quad (9.6.27)$$

Innen két tagunk lesz, nézzük az elsőt:

$$\left\{ x p_y, \left(\frac{p_x p_y}{2m\omega} + m\omega \frac{xy}{2} \right) \right\} = ? \quad (9.6.28)$$

$$= x \left\{ p_y, \left(\frac{p_x p_y}{2m\omega} + m\omega \frac{xy}{2} \right) \right\} + \left\{ x, \left(\frac{p_x p_y}{2m\omega} + m\omega \frac{xy}{2} \right) \right\} p_y \quad (9.6.29)$$

Egy tagban lesz a derivált nem nulla:

$$= -x \frac{\partial p_y}{\partial p_y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p_x p_y}{2m\omega} + m\omega \frac{xy}{2} \right) + \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p_x} \left(\frac{p_x p_y}{2m\omega} + m\omega \frac{xy}{2} \right) p_y \quad (9.6.30)$$

$$= -x \left(m\omega \frac{x}{2} \right) + \left(\frac{p_y}{2m\omega} \right) p_y \quad (9.6.31)$$

$$= -m\omega \frac{x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2m\omega} \quad (9.6.32)$$

$$= \frac{1}{2m\omega} (-m^2 \omega^2 x^2 + p_y^2) \quad (9.6.33)$$

A másik hasonlóan

$$\{y p_x, \left(\frac{p_x p_y}{2m\omega} + m\omega \frac{xy}{2} \right)\} = \frac{1}{2m\omega} (-m^2 \omega^2 y^2 + p_x^2) \quad (9.6.34)$$

Tehát összevonva:

$$\{S_3, S_1\} = \frac{1}{4m\omega} [-m^2 \omega^2 x^2 + p_y^2 + m^2 \omega^2 y^2 - p_x^2] \quad (9.6.35)$$

$$= \frac{1}{4m\omega} [p_y^2 - p_x^2 + m^2 \omega^2 y^2 - m^2 \omega^2 x^2] \quad (9.6.36)$$

$$= \frac{p_y^2 - p_x^2}{4m\omega} + \frac{y^2 - x^2}{4} m\omega \quad (9.6.37)$$

$$= S_2 \quad (9.6.38)$$

Teljesen hasonló módon be lehet látni a másik kettőre is, így

$$\{S_i, S_j\} = \epsilon_{ijk} S_k \quad (9.6.39)$$

Ami pont olyan, mint a forgatásokat generáló perdületek: ezek a megmaradó mennyiségek a fent említett gömbön való forgatásokat generálják, mint szimmetriákat.

Most ehhez nem néztük meg direktben a hatásukat a fázistéren, helyette a Poisson-zárójelüket számítottuk ki. Láthattuk, hogy ez pont olyan, mint a forgatásoké: erre hivatkozva mondhatjuk azt, hogy ők is forgatnak. Kicsit precízebben szólva ugyanazt az *algebrát* tudják, mint a forgatások. Ezeket az algebrákat maguk a zárójelek (kommutátorok) határozzák meg, mint

$$\{T_i, T_j\} = f_{ij}^k T_k \quad (9.6.40)$$

ahol az f_{ij}^k úgy nevezett *struktúraállandók* elmondanak nekünk mindent.