Beadandó - II./1,2

Elméleti mechanika A

2025.11.30.

1. feladat

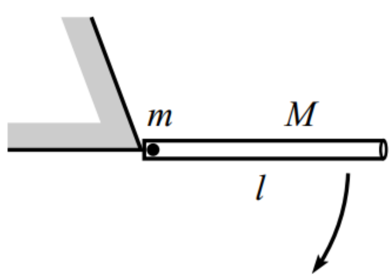
Vegyünk egy l hosszúságú, M tömegű keskeny hengert, majd függesszük fel az egyik végét egy forgást megengedő csuklóval. Rakjunk bele egy m tömegpontot, ami a hengeren belül szabadon mozoghat az egyik és a másik vége közt, illetve követi a henger csuklópont körüli lengését.

(a) Írjuk fel (a henger tehetetlenségi nyomatékával együtt) a rendszer teljes Lagrange-függvényét.
(3 pont)

(b) Vezessük le közelítés nélkül az Euler-Lagrange egyenleteket a kis tömegpont sugárirányú távolságára, illetve a rúd kitérési szögére.
(4.5 pont)

(c) Oldjuk meg ezek közül a kitérési szögre vonatkozó egyenletet abban a közelítésben, hogy $m \approx 0$, illetve a vertikálistól való kitérés szöge kicsi. Mi lesz a mozgás frekvenciája a sima ingáéhoz képest?
(3 pont)

(d) A kis tömegpont egyenletében is alkalmazzuk a kis szöges közelítést, másodrendig. Feltéve, hogy a kezdeti pillanatban $r(t = 0) = 0$, milyen kezdeti szögeknél lehet a tömegpont kezdeti gyorsulása negatív? Miért nem valid megoldás ez?
(3.5 pont)



1. ábra. Vázlatos ábra a rudas ingáról, benne egy mozgó tömegponttal. A kis m tömegű test szabadon mozoghat a forgó hengeren belül.

Tipp: válasszuk általános koordinátáknak a kis tömegpont csuklótól való sugárirányú r távolságát, illetve az ingás feladatoknál megszokott φ szöget.

2. feladat

A következő a Lagrange-függvényünk:

$$\mathscr{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \frac{1}{2}(q_1^2 - q_1 q_2)\dot{q_1}^2 + \frac{1}{2}(2q_2^2 - q_1 q_2)\dot{q_2}^2 + \frac{1}{2}q_1 q_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$

Ez egyébként egy tömegpont szabad mozgását írja le egy speciális módon görbült két dimenziós térben, de számunkra most ez irreleváns. Mi a mozgásegyenletek eredményére vagyunk kíváncsiak.

(a) Mi lesz a rendszer $\mathscr{H}(\underline{q}, \underline{p})$ Hamilton függvénye?

(4 pont)

(b) Mi a négy mozgásegyenlet?

(3 pont)

(c) Kis rendezés után kiderült, hogy ezekből kettőt meg tudunk oldani. Ennek eredményeképp megkapjuk a $p_1(q_1)$ és $p_2(q_2)$ paraméteres megoldásokat.

(4.5 pont)

(d) Ezek tudatában rajzoljuk fel a fázistér két vetületét rendre a $q_1 - p_1$ és $q_2 - p_2$ síkokra! Tüntessünk fel rajta pár különböző kezdeti értékhez tartozó pályát.

(2 pont)

(e) Oldjuk meg a maradék két mozgásegyenletet is azokkal a kezdeti feltételekkel, hogy minden egy, tehát $q_1(0) = q_2(0) = p_1(0) = p_2(0) = 1$! Mi ekkor az energia, illetve a négy változó explicit megoldása időben?

(2.5 pont)

Tipp: a (c) lépés nem triviális. Inspirálódhatunk a Hamilton alakjából, ami itt meg kell hogy maradjon az explicit időfüggés hiánya miatt. Ezen felül hasznos lehet még

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln f(t) = \frac{\dot{f}}{f}$$

továbbá a logaritmikus azonosságok:

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$$
$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$