

Beadandó - II./3,4

Elméleti mechanika A

2025.11.30.

3. feladat

Vegyük a következő Hamilton-függvényt:

$$\mathcal{H}(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = -\frac{1}{2m} \left(\frac{1}{2}r^2 + bp_\varphi \right) \exp \left(\frac{r\varphi - ar^2 + (b-1)(p_r + ap_\varphi)}{r\varphi - ar^2 + b(p_r + ap_\varphi)} \right)$$

(a) Bizonyítsuk be, hogy a következő transzformáció

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{p_r + ap_\varphi}{r} & Q_2 &= -p_\varphi \\ P_1 &= -\frac{1}{2}r^2 - bp_\varphi & P_2 &= \varphi - ar + b\frac{p_r + ap_\varphi}{r} \end{aligned}$$

kanonikus!

(6 pont)

(b) Számítsuk is ki, hogy a fenti Hamilton-ra haddatva ezt a transzformációt, mi lesz az új Hamilton függvény az új Q és P változók szerint.

(2 pont)

(c) Vérszemet kapva, az a sejtésünk van, hogy a

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{P_1}{2m} \exp \left(1 - \frac{Q_1}{P_2} \right) & p_2 &= P_2 \\ q_1 &= 2mP_2 \exp \left(\frac{Q_1}{P_2} - 1 \right) & q_2 &= Q_2 + \frac{Q_1}{P_2} - \frac{P_1}{P_2} \exp \left(1 - \frac{Q_1}{P_2} \right) \end{aligned}$$

transzformáció után triviális alakra tudjuk hozni az új Hamiltont, aztán könnyen kiszámítani a fizikailag megvalósuló pályákat. Miért hibás ez a gondolatmenet?

(2 pont)

Tipp: Ne invertáljuk a trafókat, ha nem muszáj. Helyette az eredeti Hamiltont alakítsuk.

4. feladat

Vegyünk egy egy dimenzióban mozgó részecskét, és rakjuk bele a következő potenciálba:

$$V(q) = -\frac{k}{\sqrt{|q|}}$$

- (a) Fejezzük ki a lendületet a koordináta függvényében. Hogyan néz ki $V(q)$ és a $q - p$ fázistér? **(2.5 pont)**

- (b) Szeretnénk megtudni a részecske mozgásának periódusidejét. Ehhez először is számítsuk ki, hogy mi lesz az energia egy adott ($q = q_0, p = 0$) pontban. Arra leszünk kíváncsiak, hogy mennyi idő alatt ér vissza ide az innen elindított rendszer. **(1 pont)**

- (c) Írjuk fel a hatás-szög formalizmusban a lendület változóra vonatkozó integrált:

$$J = \oint_{E=E_0} p dq$$

Ehhez a körintegrált válasszuk a fenti pontban leírt mozgásnak, és bontsuk részekre!

(1 pont)

- (d) Írjuk fel az eredményt

$$J = f(E, m, k) \cdot \int_0^1 g(u) du$$

alakban: az integrál eredménye így már csak egy I szám lesz, amire nem vagyunk kíváncsiak.

(2 pont)

- (e) Átrendezve, megkaphatjuk az energiát J függvényében. Ezzel felírva a Hamiltont, számítsuk ki, mi lesz a mozgás frekvenciája:

$$\dot{Q} = \nu = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J}$$

Amiből pedig fejezzük ki a periódusidőt az energia függvényében!

(2 pont)

- (f) Az adiabatikus invariáns segítségével hogyan változik a rendszer energiája, ha szépen lassan a tömeget harmadára, a k paramétert pedig felére csökkentjük?

(1.5 pont)

Tipp: jó változócsere lehet az integrál elvégzéséhez az, amivel sem az integrandusban, sem a határookban nem jelenik meg semmilyen fizikai paraméter. Itt például célszerű az E és k valamilyen kombinációjával szorozni/osztani a q változót.