Beadandó - I./1,2,3

Elméleti mechanika A

2025.10.19.

1. feladat

Vegyünk egy fix l hosszúságú kötelet, majd helyezzük el a síkon valahogy úgy, hogy mindkét vége az x tengelyre essen. Mi lesz az a görbe, ami maximalizálja az általa és az x tengely által bezárt területet? Ennek kiszámításához:

(a) Bizonyítsuk be, hogy ha a Lagrange nem függ expliciten az idő változótól, akkor

$$\dot{q} \cdot \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} - \mathscr{L} = \text{konst.}$$

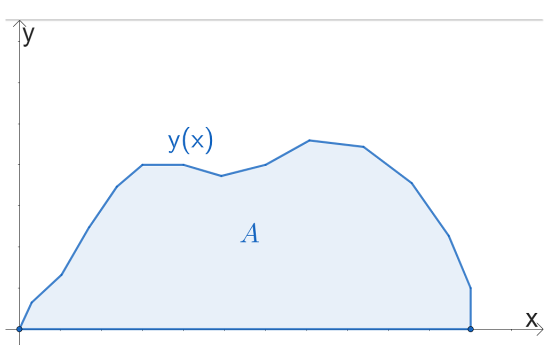
(3 pont)

(b) Írjuk fel egy álalános $y(x)$ görbe alatti területet, majd térjünk át az út szerinti integrálásra.
(2 pont)

(c) Az így kapott Lagrange-függvényre alkalmazzuk az (a) összefüggést. Ezt a differenciálegyenletet megoldva megkapjuk $y(s)$-t.

(3 pont)

(c) Fejezzük ki $x(s)$-t is, amivel fel tudjuk írni y^2-et s-től független alakban. Milyen görbe ez?
(2 pont)



1. ábra. 1. feladatot szemléltető vázlatos ábra.

Tipp: az $\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$ *alakú integrálok elvégzését megkönnyíti egy szinuszos változócsere.*

2. feladat

Vegyünk két azonos $2r$ hosszúságú tömegtelen botot, 1-1 m tömegű gyönggyel a középpontjukban. Az egyik bot egyik végét rögzítsük a földhöz úgy, hogy elmozdulni nem tud, csak forogni akörül. A másik botot pedig rögzítsük ennek a tetejéhez hasonló módon. Ha kezdetben a lenti bot merőleges a talajra, a fentit pedig kitérítjük egy kis ϵ szöggel, akkor:

(a) Mi a Lagrange-függvény? A felírásához célszerű kifejezni a tömegpontok (x, y) koordinátáit polárosan, például az ábrán felvázolt módon.

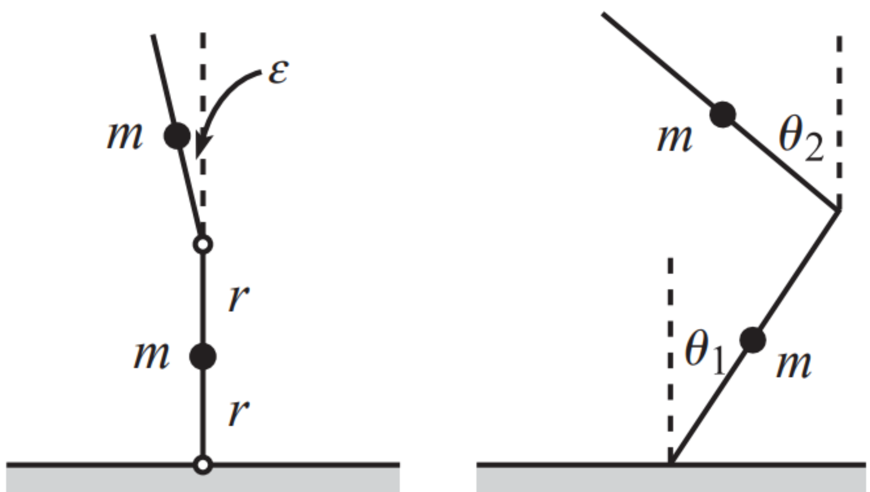
(4 pont)

(b) Mik a mozgásegyenletek abban a közelítésben, hogy a botok egyenes állástól való eltérését leíró szögek kicsik?

(4 pont)

(c) Ebben a közelítésben mik a botok kezdeti szöggyorsulásai?

(2 pont)



2. ábra. Eldőlő botok ábrája, és egy ajánlott paraméterezés.

Tipp: a kis szögekre használt közelítéssel ($\varphi^2 \approx 0$, $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1-\varphi^2/2$) *óvatosan bánjunk. Vagy a mozgásegyenletben alkalmazzuk úgy, hogy minden azonos rendű legyen; vagy ha rögtön a Lagrange-ban közelítenénk akkor a kinetikus tagban elsőrendig, a potenciális tagban másodrendig menjünk el. Gondolkodjunk el, hogy ez miért van így.*

3. feladat

Vegyünk egy tömegtelen, R sugarú kör alakú gyűrűt, és rakjuk a síkjával párhuzamosan gravitációs térbe. Erre rakjunk rá egy m tömegű gyöngyöt, ami súrlódásmentesen csúszkálhat a kör ívén. Kezdjük el konstans ω szögsebességgel forgatni a gyűrűt, és engedjük el a gyöngyöt.

(a) Mi a Lagrange-függvény?

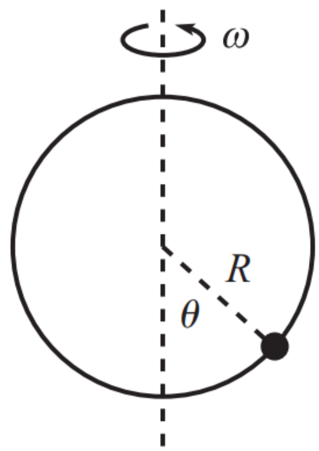
(2 pont)

(b) Mi a mozgásegyenlet?

(2 pont)

(c) Milyen θ_0 szögeknél lesz a kis gyöngy egyensúlyban? Hogyan függ ezeknek az egyensúlyi pontoknak a száma ω-tól?

(6 pont)



3. ábra. Vázlatos ábra a pörgő gyűrűn csúszkáló gyöngyről.

Tipp: egyensúlyban $\ddot{\theta}(\theta_0) = 0$.