

Szorgalmi - II/E,F

Elméleti mechanika A

2025.11.30.

E, Kollineáris háromtest-probléma

Vizsgáljuk meg a háromtest-probléma egy speciális esetét numerikusan! Vegyünk három különböző tömegű, gravitációsan kölcsönható testet. Helyezzük el őket az űrben úgy, hogy csak egy közös egyenes mentén mozoghassanak. Írjuk fel a rendszer Hamilton függvényét.

- (a) Vezessük le a mozgásegyenleteket! Oldjuk meg őket numerikusan, és ábrázoljuk a megoldások időfejlődését tetszőlegesen választott (de azért nem triviális mozgást eredményező) kezdeti feltételek mellett!

(1.5 pont)

- (b) Bár az egyenleteknek *összességében* nincs fixpontja, az egyik test mégis lehet egyensúlyban. Legyen az ő tömege, helyzete és lendülete rendre m , x és p ; a másik két testé pedig m_1, x_1, p_1 és m_2, x_2, p_2 . Mi lesz ez az $x_0 = x(m_1, m_2, x_1, x_2)$ és $p_0 = p(m_1, m_2, x_1, x_2)$ egyensúlyi pont?

(1.5 pont)

- (c) Az analitikus stabilitásvizsgálat helyett forduljunk most gépi eszközökhöz. Ábrázoljuk a fázistér $x - p$ szeletét fix x_1, x_2, p_1, p_2 mellett; és rajta különböző $x_i = x(0), p_i = p(0)$ kezdeti feltételekre az áramlásokat!

(2 pont)

- (d) Jelöljük rajta a fent kiszámított (x_0, p_0) egyensúlyi pontot. A tapasztaltak szerint milyen féle egyensúlyi pont lehet ő (vonzó/taszító/nyereg)?

(1 pont)

Tipp: Az áramlások fázistéren való ábrázolását fázisportrénak (phase portrait) is szokás hívni. Ezzel a hívószóval nézzünk utána, hogy kedvenc programozási nyelvünkön hogyan tudjuk legyártani a kért ábrát. Hasznos lehet még a háromtest-probléma Wikipédia oldala, azt is használhatjuk nyugodtan.

F, Kepler-probléma

A Kepler-probléma Hamilton-függvénye

$$\mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p}) = \frac{p^2}{2m} - \alpha \frac{1}{|r|}$$

Vezessük be a perdület segítségével a Laplace–Runge–Lenz-vektort:

$$\underline{A} = \underline{p} \times \underline{L} - m\alpha \frac{\underline{r}}{|r|}$$

- (a) Bizonyítsuk be, hogy ez egy megmaradó mennyiség, tehát

$$\{A_i, \mathcal{H}\} = 0$$

(2.5 pont)

- (b) Tudjuk, hogy a perdület is meg fog maradni, így velük együtt van 6 megmaradó mennyiségünk: $A_x, A_y, A_z, L_x, L_y, L_z$. Ezek egy *szimmetriacsoportot* alkotnak, csak az a kérdés, hogy melyet. Ehhez ki kell számítani a Poisson-zárójeleket:

$$\{A_i, L_j\} = ?$$

(2.5 pont)

- (c) Azonosítsuk be az f_{ij}^k úgynevezett *csoportszerkezeti állandókat*:

$$\{A_i, L_j\} = f_{ij}^k A_k$$

Mire hasonlít ez?

(1 pont)

Tipp: Ahol tudjuk, használjuk előbb a Poisson-zárójelek tulajdonságait, és csak végszükség esetén deriváljuk. Felhasználhatjuk azokat a zárójeleket is, amelyeket órán már levezettünk.